MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Gerhard–Wilhelm Weber

WS 2000/2001

29.3.2001

Fachprüfung Mathematik

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Wir beschäftigen uns mit der Taylor-Reihe der Funktion $f(x) := \sinh(-x) + x\cosh(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ um den Entwicklungspunkt $x_0 := 0$.

(i) Welches Polynom fünften Grades beschreibt f in der Nähe von x_0 besonders gut ?

(ii) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von f um x_0.

(iii) Ermitteln Sie den Konvergenzradius der in (ii) ermittelten Taylor-Reihe.

(iv) Begründen Sie, wieso die Taylor-Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ gleich $f(x)$ ist.

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Untersuchen Sie die beiden folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren jeweiligen Wert:

(i) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \, dx$

(ii) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{x^2-4} \, dx$

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Es sei die folgende periodisch angeregte Schwingungsgleichung vorgelegt:

$$(\mathcal{L}) \qquad \ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - 2x(t) = \sin(t) - 3\cos(t) + 10e^{-3t} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Wir wollen $(\mathcal{L})$ unter den Anfangsbedingungen

$$x(0) = 3, \qquad \dot{x}(0) = -2$$

lösen.

(i) Bestimmen Sie zunächst die Lösungsmenge der zu $(\mathcal{L})$ gehörenden homogenen Differentialgleichung

$$(\mathcal{L}_{hom}) \qquad \ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - 2x(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(ii) Ermitteln Sie eine spezielle Lösung x_s von $(\mathcal{L})$, indem Sie den Ansatz

$$x_s(t) = a\sin(t) + b\cos(t) + ce^{-3t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

verwenden.

(iii) Bestimmen Sie nun mittels (i) und (ii) diejenige Lösung x von $(\mathcal{L})$, welche zusätzlich den Anfangsbedingungen genügt.

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Gegeben sei das folgende von $c, d \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Gleichungssystem:

$$(\mathcal{L}_{c,d}) \qquad \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \\ c & 1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 \\ -d^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Für welche c, d läßt sich die *LU-Zerlegung* durchführen ?

(ii) Bestimmen Sie für die in (i) ermittelten c, d die Lösungsmenge von $(\mathcal{L}_{c,d})$ mit Hilfe der LU-Zerlegung.

(iii) Wie würden Sie die *Sensitivität* von $(\mathcal{L}_{1000,\frac{1}{10}})$, also für $c = 1000$ bzw. $d = 1/10$, gegenüber Rundungs- und anderen Datenfehlern in der Koeffizientenmatrix $A_{1000,\frac{1}{10}}$ einschätzen ?

Berechnen Sie für Ihre Antwort $\operatorname{cond}_1(A_{1000,\frac{1}{10}})$.

Aufgabe 5 (24 Punkte)

Vorgelegt sei das folgende lineare Optimierungsproblem (im $\mathbb{R}^4$):

$$(\mathcal{LP}) \qquad \begin{array}{rl} \min & 2y_1 + y_3 + y_4 \\ \text{unter} & y_3 \geq 0 \\ & y_4 \geq 0 \\ & -y_1 - y_2 - y_3 \geq -3 \\ & y_3 - y_4 \geq -4 \\ & y_1 + y_4 \geq -6. \end{array}$$

Bestimmen Sie den optimalen Zielfunktionswert, indem Sie

(i) $(\mathcal{LP})$ auf Standardform bringen und den Simplex-Algorithmus verwenden bzw.

(ii) das zu $(\mathcal{LP})$ duale Problem untersuchen.

Geben Sie zu beiden Problemen jeweils auch eine optimale Lösung an.

Tip zu (ii): Beginnen Sie Ihre Suche nach einer zulässigen Startbasis mit einer Betrachtung von $B = \{1, 3, 4, 5\}$.

Aufgabe 6 (24 Punkte)

Vorgelegt sei das folgende nichtlineare Optimierungsproblem

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{array}{rl} \min & f(x) := \sinh(x_1^2 + x_2^2) + x_3 \qquad (x \in \mathbb{R}^3) \\ \text{unter} & h(x) := x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ & g(x) := x_3 - 2 \geq 0. \end{array}$$

(i) Werten Sie eine für $(\mathcal{P})$ geeignete *notwendige Optimalitätsbedingung erster Differentiationsordnung* (mit Gradienten von f, h bzw. g) aus.

(ii) Untersuchen Sie die Anwendbarkeit einer *hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Differentiationsordnung* für den Kandidaten $x^* = (2, 0, 2)^T$. Weisen Sie nach, daß die erforderliche (verschärfte) Matrixbedingung verletzt ist.

(iii) Überlegen Sie sich, welche der Kandidaten x^* aus (i) lokale Minima für $(\mathcal{P})$ sind. Sind diese sogar strikt lokal oder global ?

Tragen Sie die Lösungsmenge in eine Skizze ein, welche die zulässige Menge S von $(\mathcal{P})$ enthält.

Aufgabe 7 (16 Punkte)

Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem in Abhängigkeit von $d \in \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$:

$$(\mathcal{P}_d) \quad \min \quad f_d(x) := \tan(dx_1^2) + dx_2^2 \qquad \left(x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad dx_1^2 \in [0, \frac{\pi}{2})\right).$$

(i) Für welche d existiert ein strikt lokales Minimum von f ?

(ii) Für welche d können wir das *Newton-Verfahren* formal auf $(\mathcal{P}_d)$ anwenden ? Hierbei brauchen Sie den Definitionsbereich von f_d nicht zu betrachten.

(iii) Stellen Sie für $d = 1$ eine allgemeine Newtonsche Formel $x^{k+1} = g(x^k)$ zur Berechnung von x^{k+1} aus x^k auf $(k \in \mathbb{N})$ und führen Sie für den Startpunkt $x^1 = (\sqrt{\pi}/2, 1)^T$ einen Newton-Schritt durch.

(iv) Nennen Sie einige Motivationen oder Vorteile des *Verfahrens der konjugierten Richtungen.*