MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Johannes Müller
Dipl.Math. Michael Kurth
Dipl.Math. Andreas Zapp

SS 2001
- Blatt 11-

4.7.2001

11. Übung zur Vorlesung Verzweigungstheorie

Aufgabe 1

(i) Zeigen Sie, daß die Abbildung $F(x,\lambda) := \lambda x - x^2$ eine transkritische Bifurkation bei $\lambda = 0$ durchläuft. Bestimmen Sie auch die Stabilität der Fixpunkte.

Unter `/vol/mi/kuepper/yab/bsp.yab` ist ein Programm zur Visualisierung des Verzweigungsdiagramms abgelegt, welches sich mittels

```
bash>/vol/mi/kuepper/bin/yabasic /vol/mi/kuepper/yab/bsp.yab
```

starten läßt.

(ii) Visualieren Sie die Verzweigungsdiagramme zur (a) logistischen Abbildung $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ bzw. zum (b) Rickert-Modell $G_\mu(x) = \mu x \exp(-x)$ z.B. mit Hilfe von yabasic.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Abbildung $f : [1,5] \to [1,5]$, die durch den Polygonzug mit Stützstellen

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 5, \quad f(3) = 4, \quad f(4) = 2, \quad f(5) = 1$$

definiert sei. Zeigen Sie, daß es keinen Orbit der minimalen Periode 3 geben kann. Skizzieren Sie dazu die Graphen von f und f^3. Gibt es einen Punkt der minimalen Periode 5 ?

Aufgabe 3

(i) Sei $\Sigma_N := \{0,\ldots,N-1\}^{\mathbb{N}}$ der Raum der Folgen mit den Elementen $0,\ldots,N-1$.

(a) Wieviele periodische Orbits hat der auf Σ_N definierte Shift-Operator ?

(b) Zeigen Sie, daß ein Orbit existiert, der dicht in Σ_N liegt.

(ii) Für $s \in \Sigma_2$ sei $W^s(s)$, die sog. stabile Menge von s, die Menge aller $t \in \Sigma_2$, für die $d(\sigma^i(s), \sigma^i(t) \to 0$ gilt. Wie kann man $W^s(s)$ einfacher beschreiben ?

Aufgabe 4

Sei Λ die maximale invariante Menge der logistischen Abbildung $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, die bekanntlich für $\mu > 2+\sqrt{5}$ eine Cantor-Menge ist. Zeigen Sie, in Analogie zu dem Beispiel der "klassischen" Cantor-Menge, die Existenz eines Homöomorphismus $f : \Lambda \cap I_1 \to \Lambda$.