MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Johannes Müller
Dipl.Math. Michael Kurth
Dipl.Math. Andreas Zapp

SS 2001
- Blatt 1-
25.4.2001

2. Übung zur Vorlesung Verzweigungstheorie

Aufgabe 1

Gegeben sei $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^2$. Hierbei gelte $F(0,x) = f(x)$ mit $f(0) = 0, f'(0) = 0$ und $f''(0) \neq 0$ sowie $F_\lambda(0,0) \neq 0$. Untersuchen Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = F(\lambda, x)$ auf Bifurkationen bzgl. der Menge der Nullstellen in einer Umgebung des Ursprungs. Zeigen Sie weiter, dass eine Funktion $\mu : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ existiert, so dass lokal gilt: Alle λ mit $\mu(\lambda) > 0$ bzw. $\mu(\lambda) < 0$ führen zu homöomorpen Systemen bzgl. der Menge der Nullstellen.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Vektorfelder $\dot{x} = -x$ und $\dot{x} = -2x$. Beweisen Sie, daß diese nicht C^1-, wohl aber C^0-äquivalent sind. Geben Sie im letzten Fall den Homöomorphismus explizit an.

Aufgabe 3

Welche Stabilität hat der Ursprung in dem zu

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + 7x^2 - 3xy \\ -2x^2 + y^2 + 2x^4y^2 \end{pmatrix}$$

gehörigen diskreten dynamischen System ?

Aufgabe 4

Gegeben sei das lineare System $\dot{x} = Ax$ im $\mathbb{R}^n$, dabei sei A symmetrisch und die Eigenwerte von A haben negativen Realteil. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi \ : \ \mathbb{R} \times S_{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ (t,x) &\longmapsto \Phi_t(x) \end{aligned}$$

ist ein Homöomorphismus. Hierbei sei S_{n-1} die Einheitssphäre bzgl. der euklidischen Norm. Was bedeutet dies anschaulich ? Bestimmen Sie weiter eine Matrix A (dann notwendig nicht-symmetrisch), so dass die obige Aussage verletzt ist.