MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Johannes Müller
Dipl.Math. Michael Kurth
Dipl.Math. Andreas Zapp

SS 2001
- Blatt 3-

2.5.2001

3. Übung zur Vorlesung Verzweigungstheorie

Aufgabe 1

Betrachten Sie die skalare Abbildung $x_{n+1} = f(x_n)$ mit $f(x) := \frac{1}{2}x(1-x)$. Zu welcher Abbildung ist diese in der Nähe des Ursprungs konjugiert ? Gilt dies auch global ?

Aufgabe 2

Betrachten Sie das dynamischen System

$$\dot{x} = F(x)$$

mit $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $F(0) = 0$ unter der Annahme, daß dieses zu $\dot{x} = -F(x)$ lokal um 0 homöomorph ist. Welche Stabilität hat der Ursprung, wenn er hyperbolisch ist und n gerade ? Was ändert sich in ungerader Dimension ? Diskutieren Sie weiter die Stabilität, wenn die Voraussetzung der Hyperbolizität weggelassen wird.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n + g(y_n) \\ y_{n+1} &= \mu y_n, \end{aligned}$$

wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(y) = O(y^2)$ und $\lambda > 1$ sei. Leiten Sie eine notwendige Bedingung dafür her, das die Abbildung mittels eines Homöomorphismus der Form $h(x, y) = (\phi(x, y), y)$ zu ihrer Linearisierung äquivalent ist. Zeigen Sie weiter, das

$$\phi(x, y) = \lambda x + g(y) + \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} g(\mu^k y)$$

diese Bedingung erfüllt. Falls g ein Polynom ist, für welche μ sind die beiden Systeme C^∞-äquivalent?

Aufgabe 4

Gegeben seien die beiden Vektorfelder $\dot{x} = Ax$ und $\dot{x} = Bx$, der Ursprung sei in beiden Fällen hyperbolisch. Beweisen Sie folgende Aussage: Sind die beiden Vektorfelder konjugiert, so haben die stabilen Unterräume die gleiche Dimension.