MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Johannes Müller
Dipl.Math. Michael Kurth
Dipl.Math. Andreas Zapp

SS 2001
- Blatt 4-

9.5.2001

4. Übung zur Vorlesung Verzweigungstheorie

Aufgabe 1

Gegeben sei das diskrete dynamische System

$$\phi(x) = Ax + p(x) \quad \text{auf} \mathbb{R}^n,$$

wobei $p(x)$ ein Monom vom Grad k ist,

$$(p(x))_j = p_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i^j}, \quad \sum_{i=1}^{n} k_i^j = k, \quad p_j \in \mathbb{R}.$$

Setzen Sie eine Near-Identity-Transformation an als

$$H(x) = x + h(x),$$

wobei auch $h(x)$ ein Monom vom Grad k sei. Zeigen Sie:

Falls A in Diagonalform ist, $A =$diag$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, und $\lambda_j - \prod_{i=1}^{n} \lambda_j^{k_i^j} \neq 0$ gilt, so kann das Polynom p eliminiert werden, wobei allerdings Terme höherer Ordnung entstehen.

Aufgabe 2

Beweisen Sie das Gronwall'sche Lemma:

Sei $\phi(t)$ stetig mit

$$\phi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \phi(t), \quad \alpha, \beta > 0.$$

Dann gilt $\phi(t) \leq \alpha e^{\beta} t \quad$ für $t \geq 0$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß für $\epsilon > 0$ und $\psi(t) = (\alpha + \epsilon)\exp(\beta t)$ immer $\psi(t) > \phi(t)$ gilt.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Zentrumsmannigfaltigkeit zu dem System

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= a x_1^3 + x_1 x_2 \\ \dot{x_2} &= -x_2 + x_1^2 + x_1 x_2 - x_1^3. \end{aligned}$$

Welche Stabilität hat der Ursprung ?

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Zentrumsmannigfaltigkeit lokal bei $x = y = z = 0$ zu dem Lorenzsystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von ρ $(\dot{\rho} = 0)$ mit MAPLE.