MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Johannes Müller
Dipl.Math. Michael Kurth
Dipl.Math. Andreas Zapp

SS 2001
- Blatt 5-

16.5.2001

5. Übung zur Vorlesung Verzweigungstheorie

Aufgabe 1

Welche Symmetrie besitzt das Problem

(i) $\dot{x} = \mu x - x^3$

(ii) $\dot{x} = \mu x - x^2$?

(iii) aus Aufgabe 4 der letzten Übung ?

Aufgabe 2

Wir untersuchen das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + F(\lambda, x_1, x_2)$$

mit $F(0,0,0) = 0$ und $DF(0,0,0) = 0$, also $F = (F_1, F_2)$ von höherer Ordnung.

(i) Zeigen Sie: Es existiert eine Funktion $\psi(\lambda, x_1)$ mit $\psi(0,0) = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(0,0) = 0$ s.d. lokal um den Ursprung gilt:
(λ, x_1, x_2) Gleichgewichtspunkt $\Leftrightarrow G(\lambda, x_1) := F_1(\lambda, x_1, \psi(\lambda, x_1)) = 0$.

(ii) Wieso wird $G(\lambda, x_1) = 0$ Verzweigungsgleichung genannt?

(iii) Sei $W^c(0) = \{(\lambda, x_1, x_2) : x_2 = h(x_1, \lambda)\}$ die Zentrumsmannigfaltigkeit bei 0 und $F_2(\lambda, x_1, x_2) = O(k)$. Zeigen Sie: $h(x_1, \lambda) = \psi(x_1, \lambda) + O(k+1)$. Hierbei bedeutet $O(k)$ Terme k-ter Ordnung.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Symmetriegruppe zu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y - x^3 \\ \dot{y} &= -y + \omega x^2. \end{aligned}$$

Genügt die Zentrumsmannigfaltigkeit der Symmetrie ? Welches Bifurkationsverhalten finden Sie ? Was hätte man schon aufgrund der Symmetrie schliessen können ?

Aufgabe 4

Betrachten Sie die folgende Gleichung, die die Bewegung eines gedämpften Pendels mit konstanten Drehmoment beschreibt.

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin(\theta) = M.$$

Zeigen Sie: In $M = 1$ durchläuft die Gleichung eine Sattel-Knoten-Bifurkation

(i) durch direktes Berechnen der stationären Punkte bzw.

(ii) durch Berechnen der Zentrumsmannigfaltigkeit.