MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Johannes Müller
Dipl.Math. Michael Kurth
Dipl.Math. Andreas Zapp

SS 2001
- Blatt 6-
23.5.2001

6. Übung zur Vorlesung Verzweigungstheorie

Aufgabe 1

Sei $f \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ ein Vektorfeld mit $f(0) = 0$. Wie lautet die Normalform bis zur Ordnung k ?

Aufgabe 2

Gegeben sei das parameterabhängige dynamische System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - \frac{(x+y)^3}{b-a} \\ \dot{y} &= by - \frac{(x+y)^3}{b-a} \end{aligned} \tag{1}$$

in einer Umgebung des Ursprungs.

(i) Untersuchen Sie mit Maple für welche Werte von a und b sich die Terme dritter Ordnung eliminieren lassen.

(ii) Wie lautet die Normalform für $b = 0$?

(iii) Welche Bifurkation finden Sie für $b = 0$?

Aufgabe 3

Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + ax^2 + bxy + cy^2 + h.o.t. \\ \dot{y} &= \overline{a}x^2 + \overline{b}xy + \overline{c}y^2 + h.o.t. \end{aligned} \tag{2}$$

Welche quadratischen Terme können durch Near-Identity-Transformationen nicht eliminiert werden ? Welche Normalformen kann man erhalten ?

Aufgabe 4

Gegeben sei das Räuber-Beute-Modell

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx(1-x) - c\frac{xy}{\alpha + x} \\ \dot{y} &= -dy + c\frac{xy}{\alpha + x}. \end{aligned} \tag{3}$$

(i) Interpretieren Sie obiges System; was ist Räuber, was ist Beute ?

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe von Maple die stationären Punkte.

(iii) Finden Sie mit Maple den Hopf-Punkt, also Bedingungen an die Parameter, so daß im stationären Punkt ein rein imaginärer Eigenwert vorliegt.

(iv) Simulieren Sie das System für $r = 2, d = 1, \alpha = 0.5$, wobei c so gewählt werden soll, daß man einmal vor und einmal hinter dem Hopf-Punkt liegt. Was beobachten Sie ?