MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Johannes Müller
Dipl.Math. Michael Kurth
Dipl.Math. Andreas Zapp

SS 2001
- Blatt 8-

13.6.2001

8. Übung zur Vorlesung Verzweigungstheorie

Aufgabe 1

Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 + \alpha y + \beta x^2 y. \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Methode von Melnikov, daß die homoklinen Orbits, die im ungestörten System existieren, für gewisse Werte von α und β erhalten bleiben, und daß die homokline Line gegeben ist durch $\alpha = -4\beta/5 + O(\beta^2)$. Skizzieren Sie die Phasenportraits mit MAPLE für (i) $\alpha = \beta = 0$, (ii) $\beta = 0.5, \alpha = 0.2$, (iii) $\beta = 0.5, \alpha = 0.4$ und (iv) $\beta = 0.5, \alpha = 0.6$.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die Bifurkationen des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= \lambda + \mu x_1 + 3x_1^2 - x_1^3 \end{aligned} \tag{2}$$

in Abhängigkeit von λ und μ.

Aufgabe 3

Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= 1 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1^2\sin(\alpha x_1) + 2x_2 - \exp(x_2) \\ \dot{x_2} &= \alpha\exp(x_2) - 2\ln(1+x_1) - \beta x_1 - \tanh(\alpha x_2 - x_1 x_2) - \frac{1}{2}\alpha x_2^2 \end{aligned} \tag{3}$$

in Abhängigkeit von α und β in der Nähe des Ursprungs. Finden Sie Linien in der (α, β)-Ebene, auf denen Bifurkationen vorkommen und zeichnen Sie mit Hilfe von MAPLE alle vorkommenden Phasenportraits.

Aufgabe 4 (Bautin Verzweigung)

Ist bei der Hopf-Verzweigung die Nicht-Entartungsbedingung $a_1 \neq 0$ nicht gegeben, so läßt sich das System in Polarkoordinaten als

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (\mu_1 + \mu_2 r^2 + a_2 r^4)r + h.o.t. \\ \dot{\phi} &= 1 + h.o.t. \end{aligned} \tag{4}$$

schreiben. Welche Bifurkationen treten (unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung) auf ? Zeichnen Sie in der (μ_1, μ_2)-Ebene die möglichen Phasenportraits.