MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PD Dr. Johannes Müller
Dipl.Math. Michael Kurth
Dipl.Math. Andreas Zapp

SS 2001
- Blatt 9-

20.6.2001

9. Übung zur Vorlesung Verzweigungstheorie

Aufgabe 1

Gegeben sei das Nullstellenproblem

$$Lx + N(x, \lambda) = 0 \tag{1}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Hierbei sei N von höherer Ordnung ($N(0,0) = 0, N_x(0,0) = 0$) und es gelte $N(L) = \langle e_1 \rangle$ sowie $N_\lambda(0,0) \notin R(L)$. Untersuchen Sie das Problem in der Nähe des Ursprungs mit der Methode von Ljapunov und Schmidt.

Aufgabe 2

Untersucht wird die lokale Lösbarkeit der Gleichung $F(x, \lambda) = 0$, wobei $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben sei durch

$$F(x, \lambda) := \begin{pmatrix} b\lambda + ax_1 + \frac{c^2}{2}x_1^2 + x_1x_2 \\ x_2 + 2x_3 + x_2x_3 + x_3^2 \\ \lambda - x_2 + 4x_3 + x_1x_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $b, c \neq 0$. Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung eindeutig lösbar ? Zeigen Sie weiter, daß für $a = 0$ Verzweigung eintritt und bestimmen Sie deren Art.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Randwertaufgabe

$$-u'' + u^3 = \lambda u, \qquad u(0) = u(\pi) = 0. \tag{3}$$

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung in der Nähe der trivialen Lösung eindeutg lösbar, wo könnte Verzeigung auftreten ? Geben Sie im zweiten Fall den zugrundeliegenden Funktionenraum sowie dessen Aufspaltung und die Projektion gemäß der Methode von Ljapunov und Schmidt an.

Aufgabe 4

Beweisen Sie das folgende Lemma der Vorlesung:

Sei $b \in \mathcal{E}$ mit $b(0,0) = 0$. Dann gilt: $\exists\ a_1, a_2 \in \mathcal{E} : b = a_1 x + a_2 \lambda$.