Universität Köln
Angewandte Mathematik
Johannes Müller
Michael Kurth

Mathematisches Institut
Raum 116/117
Tel: 0221/4702891

Klausur zur Vorlesung Mathematik für Biologen I, 29.1.2002

Zur Bearbeitung der Klausur sind zwei Zeitstunden vorgesehen. Zugelassene Hilfsmittel sind alle Bücher, die Mitschrift der Vorlesung und der Übungen sowie ein Taschenrechner ohne Grafikfunktionen. Handys sind hingegen verboten.

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Von den insgesamt 12 Aufgaben können Sie sich 10 Aufgaben aussuchen, die Sie bearbeiten möchten.

Es wird nicht nur das Endergebnis, sondern auch Lösungswege und Zwischenschritte bewertet. Geben Sie daher bei jeder Aufgabe alle Zwischenschritte an und begründen Sie Ihre Lösung.

Versehen Sie bitte jedes von Ihnen benutzte Blatt mit Ihrem Namen. Für jede Aufgabe ist eine neue Seite anzufangen. Es empfiehlt sich selbstverständlich mit der Aufgabe zu beginnen, die einem am einfachsten erscheint. Einige Aufgaben können direkt auf dem Aufgabenblatt gelöst werden.

Füllen Sie bitte dieses Deckblatt in deutlicher Blockschrift aus und geben es am Ende der Klausur zusammen mit Ihren Lösungen ab. Wenn Sie keine Einwände gegen eine Veröffentlichung Ihrer Klausurergebnisse und der Matrikelnummer (ohne Nennung Ihres Namens) im Internet haben, so unterschreiben Sie bitte die unten stehende Erklärung. In diesem Fall werden Sie Ihr Ergebnis nach erfolgter Korrektur auf der "Übungsseite" finden.

Die Rückgabe und Besprechung der Klausur, sowie die Scheinvergabe erfolgt in den Übungsgruppen am 6.2.

Alle Mitarbeiter/innen der Vorlesung wünschen Ihnen gutes Gelingen und viel Erfolg !

Name: Vorname:

Matrikelnummer: Übungsgruppenleiter:

Hiermit stimme ich der Veröffentlichung meines Klausurergebnisses im Internet zu:

________________________ (Unterschrift)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

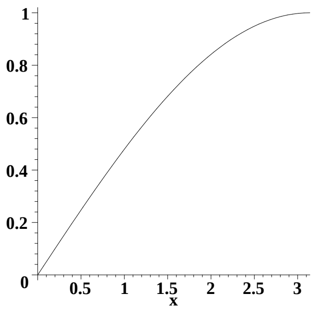
Gesamtpunktzahl:	
Bonus:	
Schein:	

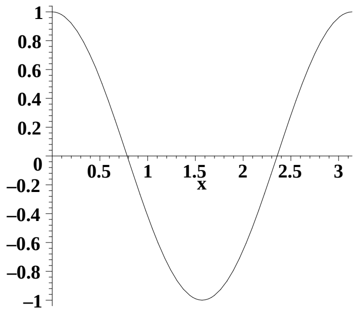
Aufgabe 1:

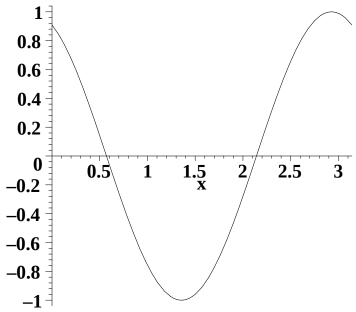
Ordnen Sie die folgenden Funktionen den zugehörigen Graphen zu.

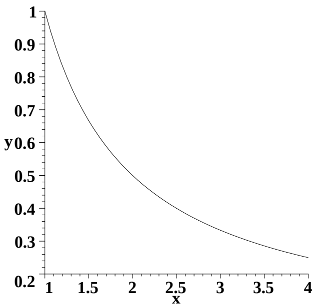
(a) $f(x) = \sin(x/2)$,	(b) $f(x) = x^2$,	(c) $f(x) = \exp(x)/(1 + \exp(x))$
(d) $f(x) = x^4$,	(e) $f(x) = 1/\ln(x)$,	(f) $f(x) = \sin(2(x + 1))$
(g) $f(x) = 1/x$,	(h) $f(x) = \exp(-x)$,	(i) $f(x) = \cos(2x)$

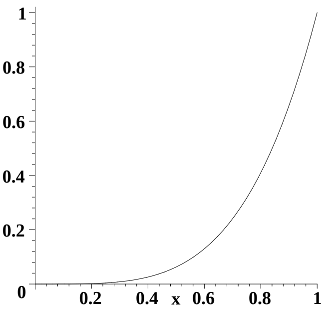
Schreiben Sie dazu den entsprechenden Buchstaben unter die passende Abbildung.

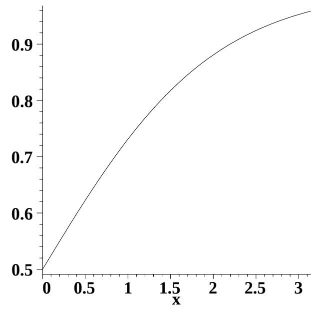


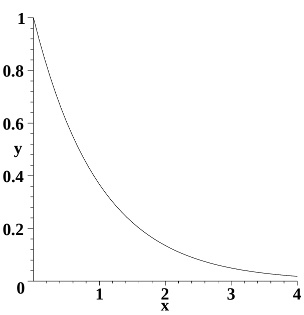


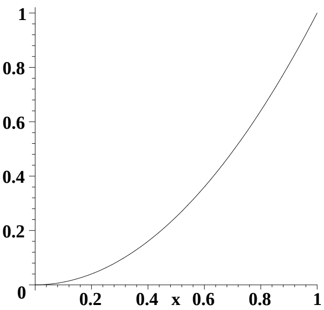


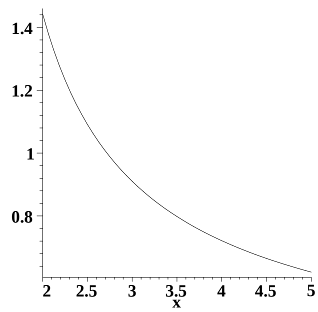












Aufgabe 2:

(i) Untersuchen Sie die Konvergenz der unten angegeben Folgen und bestimmen Sie ggf. ihren Limes. Ein formaler Beweis ist nicht nötig.

$$x_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad x_n = \cos\left(\frac{1}{n+1}\right), \quad x_n = \exp(n^2).$$

(ii) Beweisen Sie, daß die Folge

$$x_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + 5$$

nicht konvergiert.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$x(t) = -\ln(\cos(t) + C)$$

für alle $C \in \mathbb{R}$ Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sin(t)\exp(x(t))$$

ist. Bestimmen Sie die Konstante C so, daß die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 4:

Bei der C^{14}-Methode zur Altersbestimmung nutzt man aus, daß in lebenden Organismen das Verhältnis von C^{14} und C^{12} einen festen Wert c_0 hat. In toten Organismen zerfällt das Isotop C^{12} praktisch nicht, während das Isotop C^{14} mit einer Halbwertszeit von 5760 Jahren zerfällt (d.h. nach 5760 Jahren ist nur noch die Hälfte des Isotops vorhanden). Im Jahre 1947 wurden in Qumran, in der Nähe des Toten Meeres, von einem Hirtenjungen die berühmten Schriftrollen gefunden. Bei ihnen war das Verhältnis von C^{14} zu C^{12} auf $79,12\%$ von c_0 gesunken. Bestimmen Sie das Alter der Schriftrollen.

Aufgabe 5:

In einem Experiment haben Sie die Größe einer Bakterienkultur zu verschiedenen Zeitpunkten bestimmt:

Zeit t	1	5	10
Anzahl der Bakterien $y(t)$	7	11	19

Sie nehmen an, daß ein funktionaler Zusammenhang der Form

$$y(t) = a\exp(bt)$$

die obigen Daten beschreibt. Finden Sie zunächst eine Transformation, durch die man einen linearen Zusammenhang der Form

$$Y = AX + B$$

erhält. Führen Sie dann eine lineare Regression durch und bestimmen Sie damit die Konstanten a und b. Ergänzen Sie dazu folgende Tabelle und runden Sie dabei alle Einträge auf 2 Nachkommastellen.

				Σ	Σ/n
X_i					
Y_i					
X_i^2					
X_iY_i					

Aufgabe 6:

Gegeben seien Daten x_i, y_i, von denen Sie vermuten, daß sie einem funktionalen Zusammenhang der Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

genügen. (Dies ist eine Ellipse !). Finden Sie eine Transformation

$$X = g(x), \quad Y = f(y),$$

so daß X und Y einen linearen Zusammenhang der Form

$$Y = AX + B$$

erfüllen.

Aufgabe 7:

Auf einer archäologischen Grabungsstätte wird an sechs verschiedenen Tagen nach römischen Münzen gesucht. Dabei werden insgesamt 6 verschiedene Sorten $S_1, \ldots, S_6$ gefunden, die Ergebnisse der Ausgrabungen sind dabei in folgender Tabelle aufgeführt:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
Tag 1	x		x		x	
Tag 2			x	x	x	
Tag 3					x	x
Tag 4	x		x			
Tag 5		x				
Tag 6	x		x		x	

Schätzen Sie mittels Jackknife die Anzahl der verschiedenen Münzsorten, die auf dem Ausgrabungsfeld vorkommen.

Aufgabe 8:

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = 3\cos(\pi t) - \sqrt{3}\sin(\pi t).$$

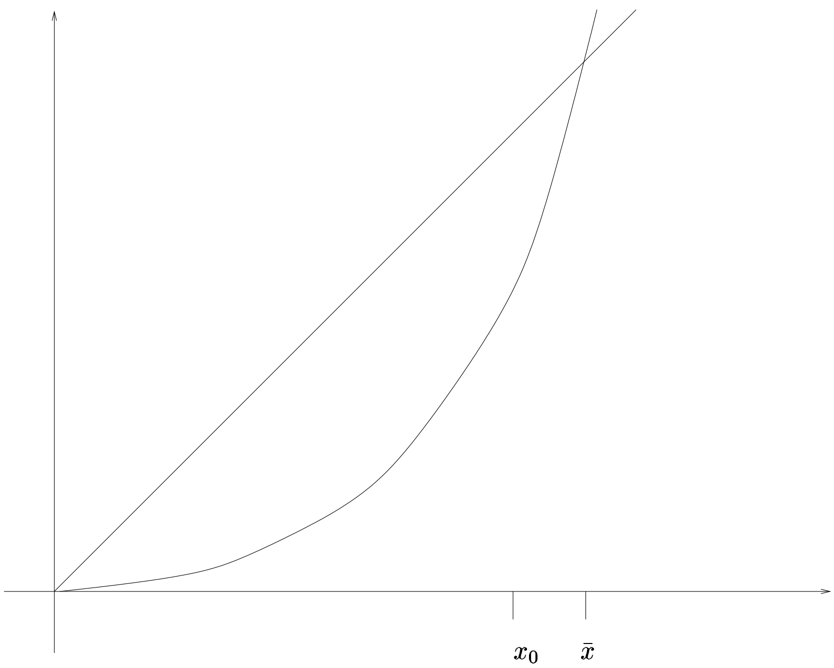
Berechnen Sie Amplitude R, Frequenz ω und Phase φ_0 von f und skizzieren Sie die Funktion ohne Verwendung einer Wertetafel.

Aufgabe 9:

Betrachten Sie das Populationsmodell

$$x_{n+1} = r\frac{x_n^3}{1+x_n^2}$$

und bestimmen Sie die nichtnegativen Gleichgewichtspunkte des Systems sowie deren Stabilität. Führen Sie weiter in der folgenden Skizze die graphische Iteration zum Startwert $x_0 < \bar{x}$ durch:



Aufgabe 10:

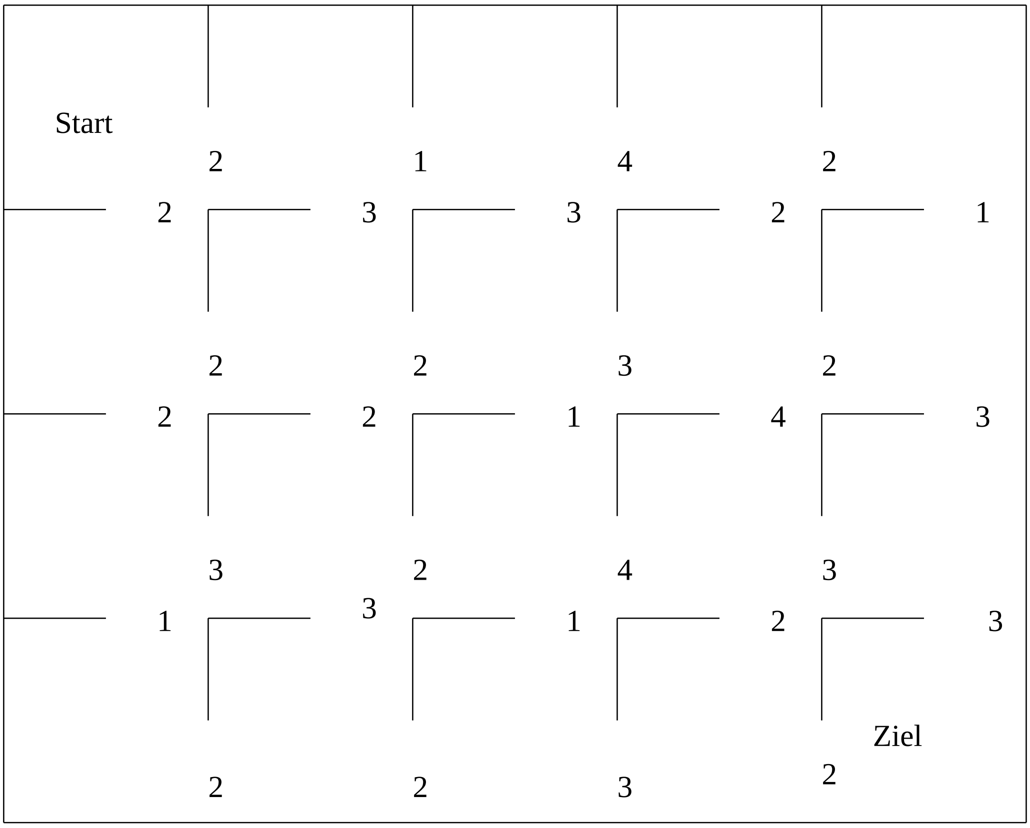
In dieser Aufgabe betrachten wir die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t) + b \text{ mit } a \neq 0.$$

Berechnen Sie die stationären Punkte und untersuchen deren Stabilität. Bestimmen Sie weiter das asymptotische Verhalten der Lösung, indem Sie obige Gleichung explizit lösen.

Aufgabe 11:

Ein Gebiet in Quadratien hat recht ungleiche Beschaffenheit, weshalb man in einigen Quadraten (z.B. mit Gebirgen oder schlechten Straßen) langsamer vorankommt als in anderen Quadraten (z.B. mit Autobahnen über flaches Land). Die untenstehende Karte gibt die Zeiten an, die man benötigt, um von einem Quadrat in ein benachbartes Quadrat zu gelangen. Dabei sind nur Schritte nach Osten (rechts) und Süden (unten) erlaubt. Berechnen Sie den optimalen (schnellsten) Weg mit dem Bellmannschen Prinzip und tragen Sie die einzelnen Werte und diesen Weg in die Karte ein.



Aufgabe 12:

Berechnen Sie das optimale Alignment der Sequenzen $AGTTA$ und $CGTA$. Ist dies eindeutig ? Verwenden Sie dazu das Scoring aus der Vorlesung und benutzen die folgende Tabelle:

	$-$	A	G	T	T	A
$-$						
C						
G						
T						
A						

Tragen Sie hier das optimale Alignment ein: