Universität Köln
Angewandte Mathematik
Johannes Müller
Michael Kurth

Mathematik für Biologen I, WS 01/02

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kuepper/biologie.html

Mathematisches Institut
Raum 116/117
Tel: 0221/4702891

Lösungshinweise zu Übungsblatt Nr. 1

Aufgabe 1

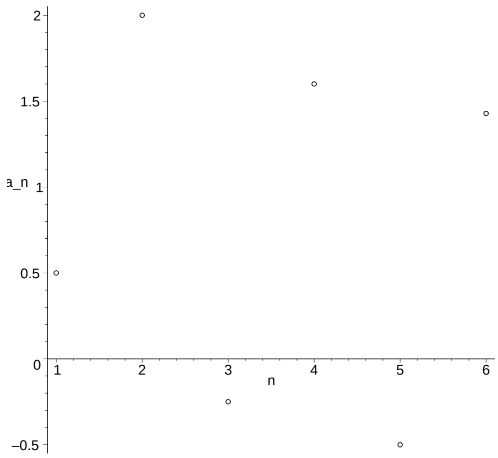
(a) Zeichnen Sie die ersten sechs Elemente der Folge (n gegen a_n)

$$a_n = (-1)^n + \frac{3}{n+1}.$$

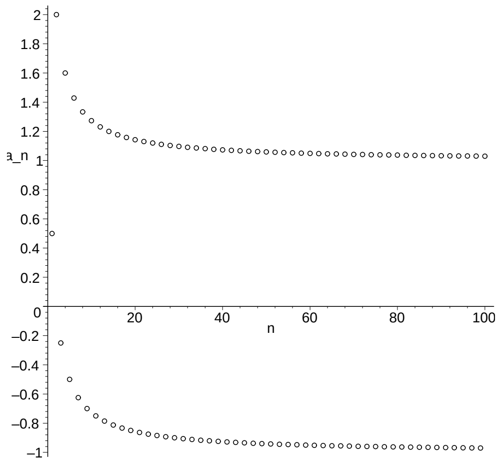
(b) Beweisen Sie, daß diese Folge nicht konvergiert.

Lösung:

(a) Für die ersten Folgeglieder gilt: $a_1 = 1/2, a_2 = 2, a_3 = -1/4, a_4 = 8/5, a_5 = -1/2, a_6 = 10/7$, siehe Skizze:



(b) Die folgende Skizze zeigt die ersten 100 Folgegelieder; man erkennt das die Teilfolgen mit geradem (a_{2k}) bzw. ungeradem (a_{2k+1}) Index konvergieren, die gesamte Folge jedoch nicht:



Zum Beweis sei angenommen, daß die Folge konvergiert. Zunächst gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{2n} = (-1)^{2n} + \frac{3}{2n+1} = 1 + \frac{3}{2n+2} \geq 1$$
$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} + \frac{3}{2n+2} = -1 + \frac{3}{2n+2} \leq -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Würde nun $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ existieren, so müßte nach Definition für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existieren, s.d. für alle $n > N$ gilt

$$|a - a_n| \leq \epsilon.$$

Aufgrund obiger Betrachtungen kann man daraus folgern:

$$a \geq 1 - \epsilon \ , \ a \leq 1/2 + \epsilon.$$

Wählt man nun zum Beispiel $\epsilon = 1/8$, so folgt $a \geq 7/8$ und $a \leq 5/8$, was nicht gleichzeitig sein kann. Es ergibt sich also ein Widerspruch zu unserer Annahme, demnach kann die Folge nicht konvergieren.

Aufgabe 2 (4P):
Konvergieren die unten angegebenen Folgen? Wenn ja, gegen welchen Limes? (Formaler Beweis ist nicht nötig!)

(a) $a_n = n - \frac{1}{n+1}$ (b) $a_n = \frac{1}{n+1}(-1)^n$

(c) $a_n = \frac{n+3}{n+5}$ (d) $a_n = n^n + (-n)^n$

Lösung:

(a) Da $\lim_{n\to\infty} 1/(n+1) = 0$, verhält sich die Folge für grosse n wie n, also gilt $a_n \to \infty$, die Folge ist divergent.

(b) Die Folge a_n konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, denn $0 < |a_n| < 1/(n+1)$ und $\lim_{n\to\infty} 1/(n+1) = 0$.

(c) Es ist

$$a_n = \frac{n+3}{n+5} = 1 - \frac{2}{n+5} \to 1,$$

da $2/(n+5)$ Nullfolge ist.

(d) Für gerade n, also $n = 2k$ mit gewissem $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{2k} = (2k)^{2k} + (-2k)^{2k} = (2k)^{2k} + (-1)^{2k}(2k)^{2k} = (2k)^{2k} + (2k)^{2k} = 2(2k)^{2k}.$$

Für ungerade $n = 2k+1$ gilt hingegen

$$a_{2k+1} = (2k+1)^{2k+1} + (-(2k+1))^{2k+1} = (2k+1)^{2k+1} + (-1)^{2k+1}(2k+1)^{2k+1} = (2k+1)^{2k+1} - (2k+1)^{2k+1} = 0.$$

Die Folge ist also divergent, hat jedoch einen Häufungspunkt 0.

Aufgabe 3 (vorrechnen):
Der jährlicher CO_2-Ausstoß in Deutschland sei x Tonnen. Angenommen, er kann jährlich um 4% reduziert werden. Wann ist der ursprüngliche Wert halbiert?

Lösung:

Sei z_n der Ausstoß im Jahr n, der ursprüngliche Wert also $z_0 = x$. Die jährliche Verringerung um $4\% = 0.04$ bedeutet

$$z_n = (1 - 0.04)z_{n-1} = 0.96z_{n-1}$$

Man kann aus der obigen rekursiven Vorschrift erkennen, daß $z_n = 0.96^n z_0$. Der ursprüngliche Wert ist ab dem Jahr n halbiert, für das gilt:

$$z_n = 0.96^n x = \frac{1}{2}x.$$

Nach Division durch x ist also das n mit $0.96^n = 1/2$ gesucht. Es folgt

$$\ln(0.96^n) = \ln(1/2) \Rightarrow n\ln(96/100) = \ln(1/2) \Rightarrow n = \frac{\ln(1/2)}{\ln(96/100)} \sim 16.97974802.$$

Nach 17 Jahren hat sich also der CO_2-Ausstoß halbiert. Die Lösung hätte man auch (ohne Logarithmus) durch systematisches Einsetzen in die Formel $0.96^n = 1/2$ finden können.

Aufgabe 4 (vorrechnen):
Sie haben ein Gefäß mit 1l reinem Alkohol und ein zweites Gefäß mit 1l Wasser. Mit einer Schöpfkelle nehmen Sie 100ml aus dem ersten Gefäß schütten den Inhalt in das zweite und rühren gut um. Dann schöpfen Sie 100ml aus dem zweiten Gefäß schütten den Inhalt in das erste und rühren wieder gut um usw. Formulieren Sie den Alkoholgehalt im ersten Gefäß als Folge. Gegen welchen Wert konvergiert sie (Nachdenken/Taschenrechner) ?

Lösung:

Es sei a_n in $[ml]$ der Alkohol im ersten und b_n in $[ml]$ der im zweiten Gefäß nach dem $n-$ten Umschüttvorgang. Wir wissen $a_n + b_n = 1000, a_0 = 1000$ und $b_0 = 0$. Nach dem ersten Umschütten gilt dann für die Konzentration q_n des Alkohols im zweiten Behälter

$$q_1 = \frac{100}{1000 + 100}.$$

Von dieser Konzentration werden nun 100ml abgeschpft und in den ersten Behälter zurückgegeben.

$$a_1 = a_0 - 100 + 100q_1 = a_0 - 100(1 - q_1) = a_0 - 100(1 - \frac{100}{1000 + 100})$$

Man berechnet a_1 als

$$a_1 = 1000(1 - \frac{1}{11}) = \frac{10000}{11} \sim 909.0909091.$$

Jetzt wird mit dem nächsten Umschütten fortgefahren, die Konzentration im zweiten Behälter berechnet sich zu

$$q_2 = \frac{b_1 + 100a_1/1000}{1100} = \frac{1000 - a_1 + 100a1/1000}{1100} = \frac{1000 - a_1(1 - 100/1000)}{1100}.$$

Davon werden nun wieder 100ml zurück in das erste Gefäß gekippt:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 - 100\frac{a_1}{1000} + 100q_2 \\ &= (1 - \frac{1}{10})a_1 + 100\frac{1000 - a_1(1 - 100/1000)}{1100} \\ &= (1 - \frac{1}{10} - 100\frac{(1 - 100/1000)}{1100})a_1 + 100\frac{1000}{1100} \\ &= \frac{9}{11}a_1 + \frac{1000}{11}. \end{aligned}$$

Dieses Verfahren wird nun iterativ fortgesetzt, man erhält

$$a_n = \frac{9}{11}a_{n-1} + \frac{1000}{11}.$$

Für die ersten Folgeglieder gilt $a_1 \sim 909.09, a_2 \sim 834.710, a_3 \sim 773.854, a_4 = 724.062, \ldots$.

Die Alkoholmenge in den Behältern verändert sich nur dann beim Umschütten nicht, wenn vorher ein beiden die gleiche Konzentration war. Dies kann aber nur der Fall sein, wenn sich in beiden Behältern jeweils 500ml Alkohol und 500ml Wasser befinden. Wie zu erwarten war, nähern sich die Alkoholkonzentrationen der beiden Gefäße immer mehr an, für $n = 23$ berechnet man zum Beispiel $a_n \sim 504.95$.