

Lösungshinweise zu Übungsblatt Nr. 10

Aufgabe 1 (8 Punkte):

Ein mol eines Stoffes entspricht der Menge von $6 \cdot 10^{23}$ Teilchen dieses Stoffes. Für ein Experiment benötigen Sie nun 100 ml einer 2-mol Lösung, also 2 mol pro Liter Wasser. Im Labor finden Sie aber nur einen Liter 10-mol Lösung. Bestimmen Sie die Menge Wasser und die minimale Menge dieser Lösung, die gemischt das gewünschte Ergebnis liefern.

Lösung:

Diese Aufgabe steht nicht direkt im Kontext der Vorlesung, dafür kann jedem Biologen dieses Problem in der Praxis begegnen. Wir benötigen also 100 ml einer 2-mol Lösung. Sei x die Menge der 10-mol Lösung in ml, die wir entnehmen müssen. Dann muss gelten:

$$2\text{mol} \cdot 100\text{ml} = 10\text{mol} \cdot x,$$

also $x = 20$ ml. Dies füllen wir dann noch mit $100 - 20 = 80$ ml auf, und erhalten die gewünschte Menge der 2-mol Lösung.

Aufgabe 2 (8 Punkte, Wiederholung):

Bei einer Untersuchung der Milchmenge y (in Liter) einer Kuh in Abhängigkeit vom Fettgehalt x (in %) ergaben sich folgende Messwerte:

					Σ	Σ/n
x_i	3.1	3.4	3.6	3.9		
y_i	26.8	21.8	16.6	14.1		
$X_i = \ln(x_i)$						
$Y_i = \ln(y_i)$						
X_i^2						
$X_i Y_i$						

Welcher Zusammenhang der Form $y = ax^b$ beschreibt die obigen Daten am besten? Füllen Sie bei Ihrer Lösung obige Tabelle aus.

Lösung:

Hier handelt es sich um die doppeltlogarithmische Transformation. Es gilt

$$y = ax^b \quad \ln(y) = \ln(ax^b) = \ln(a) + b \ln(x)$$

Sei also $X_i = \ln(x_i)$, $Y_i = \ln(y_i)$, $A = b$ und $B = \ln(a)$. Dann können wir die lineare Regressionsgerade berechnen, dazu füllen wir die folgende Tabelle aus:

					Σ	Σ/n
x_i	3.1	3.4	3.6	3.9		
y_i	26.8	21.8	16.6	14.1		
X_i	1.131401	1.2237754	1.2809338	1.3609766	4.9970879	1.249272
Y_i	3.2884019	3.08191	2.8094027	2.6461748	11.825889	2.9564723
X_i^2	1.2800707	1.4976262	1.6407914	1.8522573	6.2707456	1.5676864
$X_i Y_i$	3.7205048	3.7715656	3.5986589	3.601382	14.692111	3.6730278

Damit folgt nun

$$A = \frac{14.692111/4 - 4.9970879/4 \cdot 11.825889/4}{6.2707456/4 - (4.9970879/4)^2} = -2.9132315$$

$$B = 11.825889/4 + 2.9132315 \cdot 4.9970879/4 = 6.5958908$$

Daraus bestimmen wir nun a und b als

$$a = \exp(B) = 732.08073, \quad b = A = -2.9132315.$$

Also haben wir den Zusammenhang Milchmenge $\sim 732.08 \cdot \text{Fettgehalt}^{-2.913}$ hergeleitet.

Aufgabe 3 (vorrechnen):

Betrachten Sie das Populationsmodell

$$x_{n+1} = r \frac{x_n}{1 + x_n^2} \text{ mit } r > 0$$

und untersuchen Sie die Gleichgewichtspunkte des Modells auf deren Stabilität.

Lösung:

Zunächst berechnen wir die Gleichgewichtspunkte. Sei also $\bar{x}$ ein solcher, dann gilt

$$\bar{x} = r \frac{\bar{x}}{1 + \bar{x}^2} =: f(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} = 0 \text{ oder } 1 + \bar{x}^2 = r \Rightarrow \bar{x} = 0 \text{ oder } \bar{x} = \pm\sqrt{r-1}$$

Ganz wie im logistischen Modell existiert ein positives Gleichgewicht nur für $r > 1$. Hier taucht zusätzlich ein negatives Gleichgewicht auf, wenn die Reproduktionszahl r grösser als 1 wird. In der Interpretation des Modells als Populationsmodell ist dieser jedoch von keinem Interesse. Wir vermuten nun ein ähnliches Verhalten der Stabilität wie im logistischen Modell und rechnen:

$$f'(x) = r \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = r \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

Um Aussagen über die Stabilität der Fixpunkte machen zu können, werten wir die Ableitung an diesen Stellen aus. Wir beginnen mit dem trivialen Gleichgewicht $\bar{x} = 0$. Es ist

$$f'(0) = r$$

Dieser Fixpunkt ist also stabil, falls $r < 1$ und instabil für $r > 1$. Für die anderen Fixpunkte erhalten wir

$$f'(\pm\sqrt{r-1}) = \frac{2-r}{r} < 1 \iff 2-r < r \iff 2 < 2r \iff 1 < r.$$

Ist also $r < 1$, so sind diese Gleichgewichte instabil. Wird $r > 1$, so überträgt sich die Stabilität von $\bar{x} = 0$ auf die neu entstehenden Fixpunkte.

Aufgabe 4 (vorrechnen):

Wir betrachten, daß folgende 1975 von Hassell vorgeschlagene Populationsmodell mit Konstanten $\lambda, b > 0$:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 + x_n)^{-b}.$$

Wie sollten λ und b gewählt werden, damit die Populationen nicht aussterben? Für verschiedene Insektenpopulationen gaben Hassell et al. 1976 die folgenden Werte an:

Tierart	b	λ
Motte	0.1	1.3
Wanze	2.1	2.2
Moskito	1.9	10.6
Kartoffelkäfer	3.4	75.0
Wespe	0.9	54.0

Welche dieser Insektenarten besitzt ein positives stabiles Gleichgewicht? Welches Verhalten beobachten Sie bei den anderen Arten? Berechnen Sie dazu die Population der ersten Jahre für $x_0 = 9$.

Lösung:

Wir gehen davon aus, daß die Populationen nicht aussterben, wenn der Fixpunkt $\bar{x} = 0$ instabil ist bzw. wenn es ein stabiles positives Gleichgewicht gibt. Dazu berechnen wir zunächst den nichttrivialen Fixpunkt:

$$\begin{aligned} \bar{x} \neq 0, \quad \bar{x} &= \lambda \bar{x} (1 + \bar{x})^{-b} =: f(\bar{x}) \Rightarrow (1 + \bar{x})^b = \lambda \Leftrightarrow \ln((1 + \bar{x})^b) = \ln(\lambda) \Leftrightarrow b \ln(1 + \bar{x}) = \ln(\lambda) \\ &\Leftrightarrow 1 + \bar{x} = \exp(\ln(\lambda)/b) \Leftrightarrow \bar{x} = \exp(\ln(\lambda)/b) - 1 \end{aligned}$$

Nun suchen wir eine Bedingung an b und λ , für die dieses Gleichgewicht positiv ist. Man beachte, daß λ und b als positiv vorausgesetzt wurden:

$$\exp(\ln(\lambda)/b) - 1 > 0 \iff \ln(\lambda)/b > 0 \iff \lambda > 1.$$

Der positive Fixpunkt existiert also für $\lambda > 1$, wir vermuten, daß dieser dann auch die Stabilität von $\bar{x} = 0$ übernimmt. Um dies nachzuweisen, berechnen wir die Ableitung von f :

$$f'(x) = \lambda(1+x)^{-b} + \lambda x \cdot (-b)(1+x)^{-b-1} = \lambda(1+x)^{-(b+1)} (1 + (1-b)x).$$

Es gilt $f'(0) = \lambda$, also verliert der triviale Fixpunkt seine Stabilität falls λ den Wert 1 überschreitet. In diesem Fall wird die Population also nicht aussterben. Um zu sehen, ob das positive Gleichgewicht die Stabilität dann übernimmt, werten wir die Ableitung an dieser Stelle aus. Es gilt

$$f'(\exp(\ln(\lambda)/b) - 1) = \lambda \exp(\ln(\lambda)/b)^{-(b+1)} ((1-b) \exp(\ln(\lambda)/b) + b)).$$

Um die Bedingung für Stabilität zu vereinfachen, setzen wir zunächst $y := \exp(\ln(\lambda)/b)$. Es gilt:

$$y^b = \exp(b \ln(\lambda)/b) = \exp(\ln(\lambda)) = \lambda,$$

also lautet die Bedingung für Stabilität mit $S = f'(\bar{x})$ wie folgt:

$$|S| := |\lambda y^{-(b+1)} ((1-b)y + b)| = |y^{-1} ((1-b)y + b)| = |1 - b + b/y| = |1 + b(1/y - 1)| < 1.$$

Diese Bedingung werden wir nun für die einzelnen Tierarten überprüfen. Dabei vermuten wir, daß sie für die Arten mit $\lambda > 1$ erfüllt ist. Das Ergebnis kann man folgender Tabelle entnehmen:

Tierart	b	λ	S	$\bar{x} = \exp(\ln(\lambda)/b) - 1$ stabil ?
Motte	0.1	1.3	0.907	ja
Wanze	2.1	2.2	0.343	ja
Moskito	1.9	10.6	-0.352	ja
Kartoffelkäfer	3.4	75.0	-1.445	nein
Wespe	0.9	54.0	0.111	ja

Jede Tierart erfüllt die Bedingung $\lambda > 1$, stirbt also nicht aus. Alle Tierarten bis auf den Kartoffelkäfer besitzen ein stabiles positives Gleichgewicht, auf das sich die Größe der jeweiligen Population einpendeln wird. Beim Kartoffelkäfer vermuten wir in Anlehnung an die logistische Gleichung einen Punkt der Periode 2, also ein $\bar{x}$ mit $f(f(\bar{x})) = \bar{x}$. Dies analytisch zu verifizieren ist jedoch sehr schwierig, daher iterieren wir die Folge x_n mit dem Startwert $x_0 = 9$ und erhalten

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.2687223402, & x_2 &= 8.972606878, \\ x_3 &= 0.2704147181, & x_4 &= 8.988284967, \\ x_5 &= 0.2694442708, & x_6 &= 8.979328108, \\ x_7 &= 0.2699980814, & x_7 &= 8.984450525, \end{aligned}$$

was unsere Vermutung bestätigt. Diese Folge konvergiert offenbar gegen einen Orbit der Periode 2. Für den Kartoffelkäfer bedeutet dies, daß die Größe der Population zwischen zwei Werten schwankt. Auf eine Zeitspanne mit wenig Käfern folgt eine mit vielen usw.

Die Tatsache, daß der Fixpunkt $\bar{x} = \exp(\ln(\lambda)/b) - 1$ für $\lambda > 1$ stabil ist, kann man auch allgemein analytisch untersuchen. Dies wird hier dargestellt, war aber nicht gefordert in dieser Aufgabe: Betrachten wir also die für Stabilität hinreichenden Ungleichungen

$$1 + b(1/y - 1) < 1/\lambda \quad \text{und} \quad 1 + b(1/y - 1) > -1/\lambda.$$

Sei $\lambda > 1$. Nach Definition ist dann $y = \exp(\ln(\lambda)/b) > 1$. Demnach gilt

$$1 + b(1/y - 1) < 1 + b(1 - 1) = 1,$$

und die erste Ungleichung ist erfüllt. Aus der zweiten Ungleichung leiten wir nun eine Bedingung an b und λ her, unter der Stabilität gilt. Es ist

$$1 + b(1/y - 1) = 1 + b(\exp(-\ln(\lambda)/b) - 1) > -1 \iff \exp(-\ln(\lambda)/b) > 1 - \frac{2}{b} = \frac{b-2}{b}$$

Für $b \leq 2$ ist dies offenbar immer erfüllt, da die rechte Seite dann negativ ist. Ist nun $b > 2$, so logarithmieren wir die Gleichung und erhalten die folgende äquivalente Formulierung:

$$-\ln(\lambda) > b \ln \left(\frac{b-2}{b} \right) = \ln \left(\left(\frac{b-2}{b} \right)^b \right).$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\ln(\lambda) < -\ln \left(\left(\frac{b-2}{b} \right)^b \right) = \ln \left(\left(\frac{b}{b-2} \right)^b \right).$$

Also haben wir folgende obere, von $b > 2$ abhängige Schranke an λ gefunden:

$$\lambda < \left(\frac{b}{b-2} \right)^b.$$

Ist also entweder $b < 2$ oder obige Ungleichung erfüllt, so ist der nichttriviale Fixpunkt stabil.

Aufgabe 5 (Wiederholung):

Der Weihnachtsmann interessiert sich dafür, wieviele verschiedene Sorten Weihnachtsbäume in deutschen Wohnzimmern stehen. Dazu führt er in einigen Städten und Dörfern Befragungen durch. Das Ergebnis entnehme man untenstehender Tabelle. Was schätzt ein mathematischer gebildeter Weihnachtsmann ?

	Blaufichte	Nordmanntanne	Kiefer	Edelmanntanne	Rotfichte	künstlicher Baum
Köln	x		x		x	
München		x		x	x	
Bad Salzdetfurt					x	x
Jena	x	x	x			
Hintertupfingen		x				
Schalkenmehren			x		x	

Lösung:

Ein mathematisch gebildeter Weihnachtsmann wird selbstverständlich den Jackknife-Schätzer berechnen. Wir berechnen also zunächst die Schätzwerte bei weggelassener i -ter Stadt, wobei wir die Städte von oben nach unten durchnummerieren. Wäre der Weihnachtsmann nicht in Köln zu Befragungen unterwegs gewesen, so hätte er die in Köln vorhandenen Weihnachtsbaumarten auch in einer der anderen Städte entdeckt. Es ist also

$$Z_6^{(1)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6$$

Analog lassen sich die anderen Werte berechnen:

$$Z_6^{(2)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6$$

$$Z_6^{(3)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = 11$$

$$Z_6^{(4)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6$$

$$Z_6^{(5)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6$$

$$Z_6^{(6)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6$$

Der gesuchte Jackknife-Schätzer ist nun der Mittelwert aus diesen Werten:

$$\hat{Z}_6 = \frac{1}{6}(6 + 6 + 11 + 6 + 6 + 6) = \frac{41}{6} \sim 6.833.$$

Wir runden den Wert auf 7 auf und schätzen, daß es 7 verschiedene Baumarten gibt. Welche die noch unbekannte, siebte Sorte ist, darauf kennt die Mathematik allerdings keine Antwort. (Wohnzimmerpalme ?)