

Lösungshinweise zu Übungsblatt Nr. 11

Aufgabe 1 (8 Punkte):

Die Populationsdynamik einer Population von Schmetterlingen sei gegeben durch

$$\frac{d}{dt}x(t) = -2x(t)(1-x(t))(7-x(t)).$$

Bestimmen Sie das Verhalten der Population (stationäre Punkte, Stabilität). Wie könnte man diese Gleichung biologisch interpretieren?

Lösung :

Sei $f(x) := -2x(1-x)(7-x)$. Gesucht sind die stationären Punkte von f , also diejenigen $\bar{x}$, für die $f(\bar{x}) = 0$ gilt. Wie man leicht sieht, ist dies genau für

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 1, \quad \bar{x}_3 = 7.$$

der Fall. Um die Stabilität zu untersuchen, berechnen wir die Ableitung von f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2(1-x)(7-x) - 2x \cdot (-1) \cdot (7-x) - 2x \cdot (1-x) \cdot (-1) \\ &= -2(7-8x+x^2) + 2(7x-x^2) + 2(x-x^2) = -6x^2 + 32x - 14. \end{aligned}$$

Diese werten wir nun an den stationären Punkten aus:

$$f'(0) = -14 \Rightarrow \bar{x}_1 = 0 \text{ stabil,}$$

$$f'(1) = 12 \Rightarrow \bar{x}_2 = 1 \text{ instabil,}$$

$$f'(7) = -84 \Rightarrow \bar{x}_3 = 7 \text{ stabil.}$$

Für die Schmetterlingspopulation bedeutet die Tatsache, daß es zwei verschiedene stabile Zustände gibt, daß das Verhalten der Population abhängig von der Grösse der Population zum Zeitpunkt $t = 0$ ist. Ist $x(0) < 1$, so ist $f'(x(0)) < 0$ und für große t strebt die Population gegen den stabilen Gleichgewichtspunkt $\bar{x}_1 = 0$. In diesem Fall sterben die Schmetterlinge also aus. Ist dagegen $7 > x(0) > 1$ (bzw. $x(0) > 7$), so ist $f'(x(0)) > 0$ (bzw. $f'(x(0)) > 0$) und die Grösse der Population strebt gegen den stabilen stationären Zustand $\bar{x}_3 = 7$. Insbesondere stirbt die Schmetterlingspopulation weder aus noch explodiert sie.

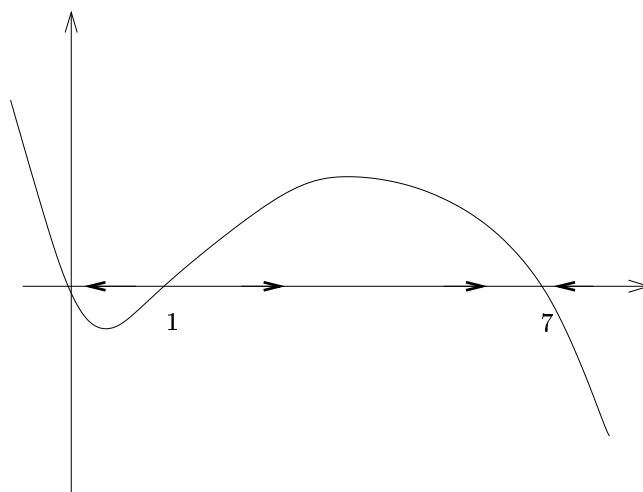


Abbildung 1: Graphische Stabilitätsuntersuchung

Aufgabe 2 (8 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir die Dynamik von zeitlich kontinuierlichen Systemen in der Nähe eines stationären Punktes untersuchen. Zeigen Sie, daß für einen stationären Punkt $\bar{x}$ des Systems $\dot{x} = f(x)$ gilt:

- (i) $\bar{x}$ stabil $\iff f'(\bar{x}) < 0$
- (ii) $\bar{x}$ instabil $\iff f'(\bar{x}) > 0$

Gehen Sie dabei analog zur lokalen Analyse von zeitlich diskreten Modellen vor (vgl. Abschnitt 1.1.4 der Vorlesung). Die resultierende, lineare Gleichung kann man auch hier explizit lösen.

Lösung :

Wie auch bei den diskreten Systemen werden wir f in der Nähe des Gleichgewichtspunktes $\bar{x}$ durch seine Taylorentwicklung approximieren. Sei also $x(t) = \bar{x} + z(t)$, wir stellen uns z als sehr klein vor, da wir das System ja nur in der Nähe von $\bar{x}$ untersuchen wollen. Mit Hilfe des Satzes von Taylor folgt nun

$$f(x) = f(\bar{x} + z) \sim f(\bar{x}) + z f'(\bar{x}) + \frac{z^2}{2} f''(\bar{x})$$

Den letzten Term können wir vernachlässigen, da z^2 sehr klein ist. Weiter ist $f(\bar{x}) = 0$, da $\bar{x}$ ja ein Gleichgewichtspunkt ist. Also ersetzen wir in der rechten Seite der Differentialgleichung

$$f(x) = z f'(\bar{x})$$

und in der linken Seite

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(\bar{x} + z(t)) = \frac{d}{dt}z(t).$$

Also lautet die Gleichung für z :

$$\frac{d}{dt}z(t) = z f'(\bar{x})$$

Es ist nun klar, daß der Gleichgewichtspunkt stabil ist, falls $z(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und instabil, falls $z(t) \rightarrow \pm\infty$ für $t \rightarrow \infty$. Die Differentialgleichung für z ist nun vom Typ $\dot{z} = \lambda z$. Die zugehörige Lösung lautet $x(t) = x(0) \exp(\lambda t)$. Also können wir $z(t)$ berechnen als

$$z(t) = z(0) \exp(f'(\bar{x})t).$$

Ist nun $f'(\bar{x}) < 0$, so konvergiert $z(t)$ gegen 0 und damit $x(t)$ gegen den Fixpunkt $\bar{x}$, der demzufolge stabil ist. Im umgekehrten Fall, also $f'(\bar{x}) > 0$, läuft $z(t)$ entweder gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$, abhängig vom Vorzeichen von $z(0)$. Der Gleichgewichtspunkt ist in diesem Fall also instabil.

Aufgabe 3 (vorrechnen):

In dieser Aufgabe betrachten wir die logistische Gleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = rx(t)(1 - x(t)).$$

Berechnen Sie die stationären Punkte und untersuchen deren Stabilität sowohl analytisch als auch graphisch. Wie ist das asymptotische Verhalten der Lösung? Benutzen Sie dazu die explizite Lösung aus Aufgabe 4 der vierten Übung.

Lösung :

Auch hier definieren wir die rechte Seite als $f(x) := rx(1-x)$. Die Gleichgewichtspunkte sind nun die Nullstellen von f , also $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Um deren Stabilität zu untersuchen, berechnen wir die Ableitung von f mit der Produktregel:

$$f'(x) = r(1-x) - rx = r(1-2x).$$

Es ist $f'(0) = r$ und $f'(1) = -r$. Ist also $r > 0$, so ist der Fixpunkt $x_1 = 0$ instabil und $x_2 = 1$ stabil. Für negatives r ist dies genau umgekehrt. Dies kann man sich auch anhand nachfolgender Skizze überlegen. Aus Aufgabe 4 der vierten Übung ist bekannt, daß

$$x(t) = \frac{\exp(rt + b)}{1 + \exp(rt + b)}$$

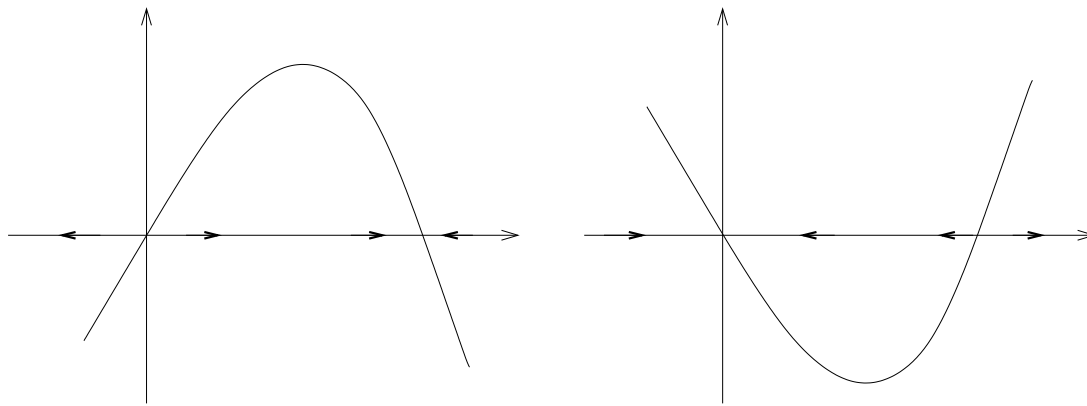


Abbildung 2: Graphische Stabilitätsuntersuchung für $r > 0$ (links) bzw. $r < 0$ (rechts)

die allgemeine Lösung der logistischen Gleichung ist. Das asymptotische Verhalten der Lösung ist abhängig vom Vorzeichen von r , es gilt:

$$\begin{aligned}
 r > 0 & \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \exp(-(rt + b))} = \frac{1}{1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-(rt + b))} = \frac{1}{1 + 0} = 1, \\
 r < 0 & \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(rt + b)}{1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(rt + b)} = \frac{0}{1 + 0} = 0.
 \end{aligned}$$

Man erkennt daran, daß jede Lösung der logistischen Gleichung (also unabhängig von der Anfangsbedingung, es sei denn, man startet im instabilen Gleichgewicht) auf den jeweils stabilen Fixpunkt zuläuft, dieser wird daher auch asymptotisch stabil genannt.

Aufgabe 4 (vorrechnen):

Das folgende Modell beschreibt die Ausbreitung ansteckender Krankheiten in einer Population: Sei $I(t)$ der Anteil infizierter Individuen an der Gesamtpopulation zur Zeit t . Dann ist $S(t) = 1 - I(t)$ der Anteil der uninfizierten (=suszeptiblen) Individuen. Die Ansteckungsrate und die Genesungsrate werden als proportional zur Anzahl der Infizierten angenommen. Die Modellgleichung für die relative Anzahl der Infizierten lautet dann

$$\frac{d}{dt}I(t) = \alpha I(t) (1 - I(t)) - \mu I(t).$$

Dabei seien α und μ positive Konstanten. Berechnen Sie die stationären Punkte des Systems und untersuchen deren Stabilität. Für welche Parameterkonstellation verbleibt die Krankheit in der Population ?

Lösung :

Wir definieren $f(I) := \alpha I (1 - I) - \mu I = (\alpha - \mu)I - \alpha I^2$ und berechnen:

$$f(I) = 0 \iff I = I_1 = 0 \quad \text{oder} \quad I = I_2 = \frac{\alpha - \mu}{\alpha}$$

Zur Stabilitätsuntersuchung wird wieder die Ableitung von f ausgewertet an den Fixpunkten benötigt. Es ist $f'(I) = \alpha - \mu - 2\alpha I$, also

$$f'(0) = \alpha - \mu, \quad f'\left(\frac{\alpha - \mu}{\alpha}\right) = \alpha - \mu - 2(\alpha - \mu) = \mu - \alpha.$$

Demnach hängt die Stabilität der Fixpunkte davon ab, welcher der beiden Parameter größer ist. Ist die Ansteckungsrate α größer als die Genesungsrate μ , so wird der Fixpunkt $I_1 = 0$ instabil und der nichttriviale Fixpunkt stabil. In diesem Fall wird die Krankheit also in der Population verbleiben und sich dem stabilen Gleichgewicht $I_2 = (\alpha - \mu)/\alpha > 0$ annähern. Ist hingegen $\alpha < \mu$, so wird die Krankheit aussterben, denn der nichttriviale Fixpunkt wird negativ und instabil. Der einzig sinnvolle Fixpunkt $I_1 = 0$ ist in diesem Fall stabil. Wir haben noch den Fall $\alpha = \mu$ unterschlagen, in diesem Fall ist $f(I) = -\alpha I^2$ und $I_1 = 0$ ist der einzige Fixpunkt. Das übliche Kriterium läßt sich wegen $f'(0) = 0$ nicht anwenden. Die graphische Betrachtung hilft in diesem Fall weiter und zeigt, daß der Fixpunkt stabil ist.

Es sei noch bemerkt, daß sich f auch wie folgt darstellen läßt:

$$f(I) = (\alpha - \mu)I \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha - \mu}I\right)$$

Mit einer geeigneten Skalierung erhält man daraus die logistische Gleichung und hätte die Ergebnisse aus Aufgabe 3 direkt übernehmen können.

Aufgabe 5 (Wiederholung):

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = \sqrt{3} \sin(2\pi t) + \cos(2\pi t).$$

Berechnen Sie Amplitude R , Frequenz ω und Phase φ_0 von f und skizzieren die Funktion ohne Verwendung einer Wertetafel.

Lösung :

Wir schreiben gemäß dem Verfahren aus der Vorlesung

$$f(t) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) \right).$$

Gesucht ist nun der Winkel φ_0 , für den

$$\cos(\varphi_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(\varphi_0) = \frac{1}{2}$$

gilt. Dies ist für $\varphi_0 = \pi/6$ der Fall. Demnach gilt also

$$f(t) = 2 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f :

