
Lösungshinweise zu Übungsblatt Nr. 12

Aufgabe 1 (8 Punkte):

Wie in der Vorlesung sei $f(i, j)$ die Anzahl der möglichen Alignments von einer Sequenz der Länge i und einer Sequenz der Länge j .

- (i) Leiten Sie aus der Rekursionsvorschrift $f(i, j) = f(i-1, j-1) + f(i, j-1) + f(i-1, j)$ zunächst eine allgemeine Formel zur Berechnung von $f(1, j)$ bzw. $f(i, 1)$ her.
- (ii) Zeigen Sie nun in analoger Weise mit Hilfe der in (i) errechneten Formel, daß

$$f(2, j) = 2j(j+1) + 1 \quad \text{bzw.} \quad f(i, 2) = 2i(i+1) + 1$$

gilt. Dabei ist die Formel

$$\sum_{k=1}^i k = \frac{i(i+1)}{2}$$

von großem Nutzen.

Lösung:

- (i) Wir berechnen nur die Formel für $f(1, j)$, den Ausdruck für $f(i, 1)$ findet man ganz analog. Die Rekursionsvorschrift für $a_j := f(1, j)$ lautet also nach Vorlesung wie folgt:

$$a_j = f(1, j) = f(0, j-1) + f(0, j) + f(1, j-1) = 1 + 1 + a_{j-1} = 2 + a_{j-1}, \quad a_0 = f(1, 0) = 1.$$

Wir berechnen die ersten Iterierten, um eine Gesetzmäßigkeit zu erkennen:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 2 + a_0 = 2 + 1 = 3, \\ a_2 &= 2 + a_1 = 2 + 2 + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5, \\ a_3 &= 2 + a_2 = 2 + 2 \cdot 2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7. \end{aligned}$$

Insgesamt folgern wir nun

$$a_j = 2 \cdot j + 1.$$

- (ii) Wir gehen genau wie in (i) vor. Sei $a_j = f(2, j)$, dann gilt

$$a_j = f(2, j) = f(1, j-1) + f(1, j) + f(2, j-1) = 2 \cdot (j-1) + 1 + 2j + 1 + a_{j-1} = 4j + a_{j-1}.$$

Wir berechnen auch hier die ersten Iterierten, um eine Gesetzmäßigkeit zu erkennen:

$$\begin{aligned} a_0 &= f(2, 0) = 1 \\ a_1 &= f(2, 1) = 4 \cdot 1 + a_0 = 4 \cdot 1 + 1 = 5 \\ a_2 &= f(2, 2) = 4 \cdot 2 + a_1 = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 = 13 \end{aligned}$$

Damit haben wir folgende Vorschrift gefunden:

$$a_j = 4 \cdot j + 4 \cdot (j-1) + \dots + 4 \cdot 1 + 1 = 4 \left(\sum_{k=1}^j k \right) + 1.$$

Mit Hilfe der in der Aufgabenstellung angegebenen Formel läßt sich dies vereinfachen zu

$$a_j = 4 \frac{j(j+1)}{2} + 1 = 2j(j+1) + 1,$$

was zu beweisen war. Die Formel für $f(i, 2)$ findet man auch hier ganz analog.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Nachdem in der Vorlesung gezeigt wurde, wie das Schiff den kürzesten Weg zum Schatz findet, taucht nun ein neues Problem auf. Quadratic ist in mehrere (natürlich quadratische) Königreiche unterteilt. Möchte man von einem Königreich in das nächste reisen, so werden von den Königen unterschiedliche Zölle erhoben. Ziel ist es jetzt, den Schatz durch das Königreich zu transportieren und dabei die geringsten Kosten zu verursachen. Dabei sind nur Schritte nach Osten (rechts) und Süden (unten) erlaubt. Berechnen Sie den optimalen Weg mit dem Bellmannschen Prinzip und tragen die einzelnen Werte in untenstehende Karte ein. Ist der optimale Weg eindeutig bestimmt ?

Start					
	3	1	4	3	
2	3	3	2	1	
	2	2	3	2	
2	2	1	4	3	
	4	2	3	3	
1	3	3	2	1	
	2	2	3	1	Ziel

Lösung:

13		11		10		8		5
	3	1	4	3				
2	3	3	2	1				
11	9	7		6		4		
	2	2	3	2				
2	2	1	4	3				
9	8	6	3			1		
	4	2	3	2				
1	3	3	2	1				
8	6	4	1	0				
	2	2	3	1				

Der optimale Weg ist nicht eindeutig bestimmt, wir haben zwei verschiedene Wege mit den gleichen Kosten, nämlich 13, gefunden.

Aufgabe 3 (vorrechnen):

Finden Sie alle möglichen Alignments zwischen den Sequenzen *AG* und *UG*.

Lösung:

Nach Aufgabe 1 gibt es insgesamt $f(2, 2) = 2 \cdot 2 \cdot (2 + 1) + 1 = 13$ Alignments. Diese sind:

$\begin{array}{ c c } \hline A & G \\ \hline U & G \\ \hline \end{array}$	,	$\begin{array}{ c c c } \hline A & G & - \\ \hline U & - & G \\ \hline \end{array}$	,	$\begin{array}{ c c c } \hline A & G & - \\ \hline - & U & G \\ \hline \end{array}$	,	$\begin{array}{ c c c c } \hline A & G & - & - \\ \hline - & - & U & G \\ \hline \end{array}$	,	$\begin{array}{ c c c } \hline A & - & G \\ \hline U & G & - \\ \hline \end{array}$	,
$\begin{array}{ c c c } \hline A & - & G \\ \hline - & U & G \\ \hline \end{array}$	,	$\begin{array}{ c c c c } \hline A & - & G & - \\ \hline - & U & - & G \\ \hline \end{array}$	,	$\begin{array}{ c c c } \hline - & A & G \\ \hline U & G & - \\ \hline \end{array}$	,	$\begin{array}{ c c c } \hline - & A & G \\ \hline U & - & G \\ \hline \end{array}$	,	$\begin{array}{ c c c c } \hline - & A & G & - \\ \hline U & - & - & G \\ \hline \end{array}$	,
$\begin{array}{ c c c c } \hline A & - & - & G \\ \hline - & U & G & - \\ \hline \end{array}$	,	$\begin{array}{ c c c c } \hline - & A & - & G \\ \hline U & - & G & - \\ \hline \end{array}$	,	$\begin{array}{ c c c c } \hline - & - & A & G \\ \hline U & G & - & - \\ \hline \end{array}$	.				

Aufgabe 4 (vorrechnen):

Berechnen Sie alle optimale Alignments der Sequenzen *AGCTA* und *CTGA*. Verwenden Sie dazu das Scoring aus der Vorlesung und benutzen die folgende Tabelle:

	-	A	G	C	T	A
-						
C						
T						
G						
A						

Lösung:

Wir berechnen das Tableau analog zum Vorgehen in der Vorlesung:

	-	A	G	C	T	A
-	0	-2	-4	-6	-8	-10
C	-2	0	-2	-2	-4	-6
T	-4	-2	0	-2	0	-2
G	-6	-4	0	0	-2	0
A	-8	-4	-2	0	0	0

Es gibt insgesamt 5 verschiedene optimale Alignments. Die folgenden Tabellen stellen die verschiedenen Wege durch das eben errechnete Tableau mitsamt dem optimalen Alignment dar:

	-	A	G	C	T	A
-	X	X	X			
C				X		
T					X	
G					X	
A						X

zugehöriges Alignment:

A	G	C	T	-	A
-	-	C	T	G	A

	-	A	G	C	T	A
-	X	X				
C			X			
T				X		
G					X	
A						X

zugehöriges Alignment:

A	G	C	T	A
-	C	T	G	A

	-	A	G	C	T	A
-	X					
C		X	X			
T				X		
G					X	
A						X

zugehöriges Alignment:

A	G	C	T	A
C	-	T	G	A

	-	A	G	C	T	A
-	X					
C		X				
T			X	X		
G					X	
A						X

zugehöriges Alignment:

A	G	C	T	A
C	T	-	G	A

	-	A	G	C	T	A
-	X					
C		X				
T			X			
G				X	X	
A						X

zugehöriges Alignment:

A	G	C	T	A
C	T	G	-	A

Aufgabe 5 (Wiederholung):

In dieser Aufgabe betrachten wir das Populationsmodell (vgl. Aufgabe 2 der 8. Übung)

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\mu(t)x(t) + \beta(t)x(t).$$

In diesem Modell seien die Sterberate μ und die Geburtsrate β wie folgt definiert:

$$\mu(t) = \mu(1 + \cos(2\pi t)) \quad \text{bzw.} \quad \beta(t) = \beta(1 + \sin(2\pi t))$$

Dabei sind μ und β positive Konstanten.

- (i) Lösen Sie die Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $x(0) = 1$.
- (ii) Bestimmen Sie eine Konstante A , so daß $x(n) = \exp(An)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- (iii) Wie müssen β und μ gewählt werden, damit die Bevölkerung weder ausstirbt noch explodiert?

Lösung:

- (i) Aus Aufgabe 2 der achten Übung ist uns die Lösung bereits bekannt. Sie lautet (hier $x_0 = 1$):

$$x(t) = \exp\left(\int_0^t (-\mu(s) + \beta(s))ds\right)$$

Das Integral können wir explizit berechnen, es gilt:

$$\begin{aligned} I(t) &:= \int_0^t (-\mu(s) + \beta(s))ds = \int_0^t -\mu(1 + \cos(2\pi s)) + \beta(1 + \sin(2\pi s))ds \\ &= \int_0^t (\beta - \mu)ds - \mu \int_0^t \cos(2\pi s)ds + \int_0^t \beta \cos(2\pi s)ds \\ &= \int_0^t (\beta - \mu)ds - \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi t} \cos(s)ds + \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi t} \sin(s)ds, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung die bekannte Formel zur Integralberechnung von $f(cx)$ aus der Vorlesung benutzt haben. Die letzten Integrale sind bekannt, man erhält

$$\int_0^t (-\mu(s) + \beta(s))ds = (\beta - \mu)t - \frac{\mu}{2\pi} (\cos(2\pi t) - 1) + \frac{\beta}{2\pi} \sin(2\pi t).$$

Damit können wir die gesuchte Lösung wie folgt schreiben:

$$x(t) = \exp((\beta - \mu)t) \exp\left(\frac{\mu}{2\pi}(1 - \cos(2\pi t))\right) \exp\left(\frac{\beta}{2\pi} \sin(2\pi t)\right).$$

- (ii) Die Konstante A berechnet sich nach Aufgabe 2 der achten Übung zu

$$A = I(1) = \int_0^1 (-\mu(s) + \beta(s))ds = (\beta - \mu) - \frac{\mu}{2\pi} (\cos(2\pi) - 1) + \frac{\beta}{2\pi} \sin(2\pi) = \beta - \mu.$$

- (iii) Die Bevölkerung stirbt weder aus noch explodiert sie genau dann, wenn $A = 0$ ist. Die gesuchte Bedingung an β und μ lautet also $\mu = \beta$. Die Todes- und Geburtsrate müssen also gleich groß sein. In diesem Fall gilt sogar, daß am Ende jedes Jahres wieder genau die Anfangspopulation vorhanden ist, mathematisch gesprochen: $x(n) = 1$ für alle natürlichen Zahlen n .