Universität Köln
Angewandte Mathematik
Johannes Müller
Michael Kurth

Mathematik für Biologen I, WS 01/02

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kuepper/biologie.html

Mathematisches Institut
Raum 116/117
Tel: 0221/4702891

Lösungshinweise zu Übungsblatt Nr. 2

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Geben Sie jeweils die erste Ableitung an:

(a) $f_1(x) = \sqrt{3x^2 + 5}$

(b) $f_2(x) = \exp(-x^2)$

(c) $f_3(x) = -x^2 \exp(x)$

(d) $f_4(x) = \sin(1/x)$ (Falls die Ableitung von $\sin(x)$ nicht bekannt ist, so schlage man sie nach.)

Lösung:

(a) Mit Hilfe der Kettenregel sowie $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$ erhält man:

$$f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2+5}}(6x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+5}}.$$

(b) Die Ableitung von $\exp(x)$ ist nach Vorlesung wieder $\exp(x)$. Damit gilt: $f_2'(x) = -2x\exp(-x^2)$.

(c) Hier wird die Produktregel benötigt: $f_3'(x) = -x^2\exp(x) - 2x\exp(x) = -(x^2+2)\exp(x)$.

(d) Es gilt $(\sin(x))' = \cos(x)$ und mit Hilfe der Quotientenregel $(1/x)' = -1/x^2$ folgt $f_4'(x) = -\cos(1/x)/x^2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Ein Virus bricht aufgrund der Inkubationszeit bei einem Kollektiv infizierter Patienten, die sich alle zum Zeitpunkt $t = 0$ angesteckt haben, erst zu einem späterem Zeitpunkt $t > 0$ aus. Für den Anteil $y(t)$ der Patienten, bei denen der Virus noch nicht ausgebrochen ist, gilt nach einem Modell

$$y(t) = \exp(-\frac{1}{2}at^2) \tag{1}$$

mit einer von der Krankheit abhängigen Konstante $a > 0$.

(a) Zeichnen Sie $y(t)$ für $0 \le t \le 5$ und $a = 1$ in ein Koordinatensystem.

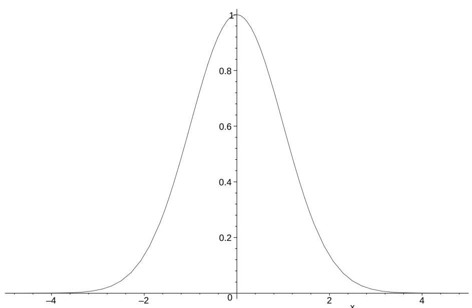
(b) Stellen Sie eine Formel auf für den Anteil der Patienten, bei denen der Virus ausgebrochen ist.

(c) Zu welchem Zeitpunkt haben wenigstens 75% der Patienten erste Anzeichen der Krankheit, wenn $a = 1$ gilt ? (Hierzu darf die Skizze aus (a) zu Rate gezogen werden.)

(d) Zur Bestimmung von a für einen bestimmten Virustyp werden Probanden mit dem Virus infiziert. Zum Zeitpunkt $t = 1$ sind bereits bei 50% des Kollektivs erste Anzeichen der Krankheit erkennbar. Wie lautet die richtige Wahl von a ?

Lösung:

(a) $y(t) = \exp(-t^2/2)$:



Wir haben hier die Funktion zwischen -5 und 5 (obwohl im Kontext der Aufgabe negative Werte für t natürlich sinnlos sind) gezeichnet, da diese Funktion an anderer Stelle noch wichtig sein wird. $y(t)$ wird auch Glockenkurve genannt.

(b) $y(t)$ beschreibt den *Anteil* der Personen, bei denen der Virus noch nicht ausgebrochen ist, also

$$y(t) = \frac{\text{Anzahl noch nicht erkrankter Personen}}{\text{Gesamtzahl der Personen}}.$$

Gesucht ist nach dem Anteil der erkrankten Personen, also

$$z(t) = \frac{\text{Anzahl erkrankter Personen}}{\text{Gesamtzahl der Personen}}.$$

Es ist $y(t) + z(t) = 1$, also $z(t) = 1 - y(t) = 1 - \exp(-at^2/2)$.

(c) Gesucht ist nach dem t für das gilt ($a = 1$):

$$z(t) = 1 - \exp(-t^2/2) = 0.75 = 3/4.$$

Mit Hilfe des ln folgt zunächst

$$-t^2/2 = \ln(1/4) \ \Rightarrow \ t^2 = 2\ln(4).$$

Wir sind nur an $t > 0$ interessiert und der gesuchte Wert berechnet sich als $t = \sqrt{2\ln(4)} \sim 1.665$. Dies durfte man auch anhand der Skizze aus (a) ablesen.

(d) Zum Zeitpunkt $t = 1$ gilt also

$$1 - \exp(-\frac{a}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Es folgt

$$\exp(-\frac{a}{2}) = \frac{1}{2} \ \Rightarrow -\frac{a}{2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2).$$

Also ist $a = 2\ln(2) \sim 1.386$ die richtige Wahl für diesen Virustyp. Falls der ln nicht bekannt ist, kann man sich dem gesuchen Wert von a auch mit dem Taschenrechner annähern.

Aufgabe 3 (vorrechnen):

Nach dem n-ten Tag genügt die Konzentration x_n eines Medikamentes im Körper eines Patienten der Relation

$$x_{n+1} = qx_n + 4, \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Hierbei sei $q > 0$ angenommen.

(a) Bestimmen Sie q, falls die Konzentration nach 2 Tagen 8.8 und nach 4 Tagen 5.152 beträgt.

(b) Wie groß war die Anfangskonzentration x_0 ?

(c) Konvergiert die Folge x_n ? Wenn ja, gegen welchen Wert ? (Die Antwort sollte ausreichend begründet sein, ein formaler Beweis ist nicht zwingend notwendig.) Was bedeutet dieses Ergebnis für das Modell ?

Lösung:

(a) Es ist $x_2 = 8.8$ und $x_4 = 5.152$. Weiter gilt nach Iterationsvorschrift:

$$x_3 = qx_2 + 4 \text{ bzw. } x_4 = qx_3 + 4.$$

Einsetzen liefert $x_4 = q(qx_2 + 4) + 4 = q^2x_2 + 4q + 4$. Wir kennen x_2 und x_4, haben also eine quadratische Gleichung für q zu lösen:

$$q^2x_2 + 4q + 4 - x_4 = 0.$$

Wir dividieren die Gleichung durch x_2 und wenden die pq-Formel mit $p = 4/x_2$ und $q = (4 - x_4)/x_2$ an:

$$\begin{aligned} q_{1,2} &= -\frac{2}{x_2} \pm \sqrt{\frac{4}{x_2^2} - \frac{4 - x_4}{x_2}} \\ &= -\frac{2 \pm \sqrt{4 - x_2(4 - x_4)}}{x_2}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte von x_2 und x_4 liefert $q_1 \sim -0.6545$ und $q_2 = 0.2$. Da wir aufgrund des Modells an $q > 0$ interessiert sind, lautet die Lösung also $q = 0.2$.

(b) Analog zu (a) folgt $x_2 = q^2 x_0 + 4q + 4$, also

$$x_0 = \frac{x_2 - 4(q + 1)}{q^2}.$$

Das bedeutet für die Anfangskonzentration $x_0 = 100$.

(d) Die Folge x_n konvergiert gegen den Wert $x = 5$, wie wiederholtes Anwenden der Iteration mit dem Taschenrechner zeigt, z.B. ist $x_5 = 5.304, \ldots, x_{10} = 5.000009728$. Um dies formal zu beweisen, leitet man zunächst per Induktion die folgende Formel her.

$$x_n = q^n x_0 + b + qb + q^2 b + \ldots + q^{n-1} b = q^n x_0 + b \Sigma_{i=0}^{n-1} q^i$$

Die letzte Summe läßt sich weiter vereinfachen, es gilt

$$x_n = q^n x_0 + b \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Nun kann man die Konvergenz untersuchen. Für $0 < q < 1$ ist $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$, demnach folgt $\lim_{n \to \infty} x_n = b/(1 - q)$, in unserem Fall also $x = \lim_{n \to \infty} x_n = 4/0.8 = 5$. Man bemerke, daß dieser Grenzwert unabhängig von der Anfangskonzentration ist.

Die Tatsache, daß die Folge x_n gegen die Grenzkonzentration 5 konvergiert, bedeutet daß das Medikament im Körper nie vollständig abgebaut wird. Ob so etwas in der Realität vorkommt, wird hier nicht diskutiert.

Aufgabe 4 (vorrechnen):

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} N(t) = \beta N(t) + \gamma. \tag{3}$$

Hierbei seien $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Zeigen Sie: Die Funktion

$$N(t) = \left(C + \frac{\gamma}{\beta}\right) \exp(\beta t) - \frac{\gamma}{\beta} \tag{4}$$

ist für jedes beliebige $C \in \mathbb{R}$ Lösung obiger Differentialgleichung mit Anfangswert $N(0) = C$. Was kann man über das Verhalten der Lösung für $t \to \infty$ aussagen ? Wie könnte man die Differentialgleichung in Bezug auf das Modell einer Bakterienkultur interpretieren ?

Lösung:

Zunächst leiten wir die Funktion ab, es gilt

$$\frac{d}{dt} N(t) = \beta \left(C + \frac{\gamma}{\beta}\right) \exp(\beta t).$$

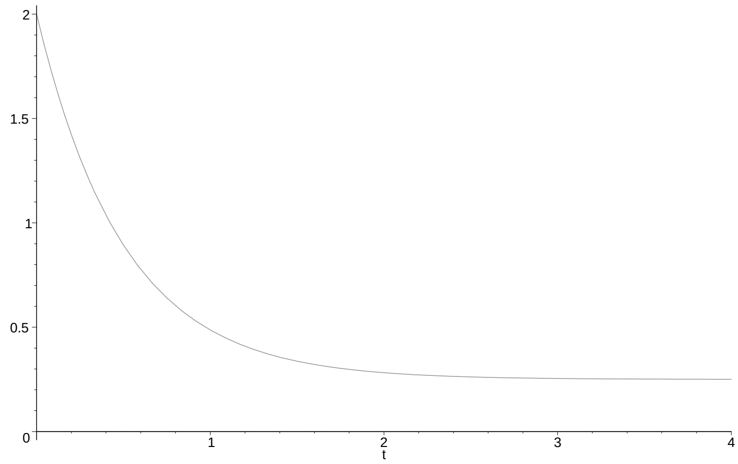
Andererseits ist

$$\begin{aligned} \beta N(t) + \gamma &= \beta \left[\left(C + \frac{\gamma}{\beta}\right) \exp(\beta t) - \frac{\gamma}{\beta}\right] + \gamma \\ &= \beta \left(C + \frac{\gamma}{\beta}\right) \exp(\beta t), \end{aligned}$$

also löst $N(t)$ die Differentialgleichung. Um das Verhalten für $t \to \infty$ zu untersuchen, betrachte man zunächst den Term $\exp(\beta x)$. Er wächst für positives β über alle Schranken, für negative β nähert er sich 0 an. Insgesamt ergibt sich also folgende Fallunterscheidung:

1. $\beta < 0 : \lim_{t\to\infty} N(t) = -\gamma/\beta$
2. $\beta > 0 :$
   (a) $C + \gamma/\beta < 0 : \lim_{t\to\infty} N(t) = -\infty$
   (b) $C + \gamma/\beta = 0 : \lim_{t\to\infty} N(t) = -\gamma/\beta$
   (c) $C + \gamma/\beta > 0 : \lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$

Die folgende Abbildung zeigt $N(t)$ für $\beta = -2$, $C = 2$ und $\gamma = -1/2$, man erkennt die Konvergenz gegen -0.25:



Interpretation: Falls $\gamma = 0$ haben wir das normale Modell für exponentielles Wachstum. Wenn nun $\gamma > 0$, so besteht eine Einwanderung von Bakterien mit konstanter Zahl pro Zeiteinheit. Typisches Beispiel ist ein Reaktor (Kläranlage o.ä.): Innerhalb des Reaktors herrscht die normale Populationsdynamik; mit der Nährflüssigkeit kann man nun weitere Bakterien gezielt von aussen zusetzen um die Population im Inneren zu steuern. Analog modelliert ein negatives γ eine Entnahme von Bakterien aus dem Reaktor.

Bemerkung: Falls wir Gift zusetzen oder die Ausschwemmung aus dem Reaktor durch einen Abfluss modellieren, so wäre der entsprechende Term proportional zur existierenden Population, d.h. gleich $-\gamma N(t)$.