Universität Köln
Angewandte Mathematik
Johannes Müller
Michael Kurth

Mathematik für Biologen I, WS 01/02

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kuepper/biologie.html

Mathematisches Institut
Raum 116/117
Tel: 0221/4702891

Lösungshinweise zu Übungsblatt Nr. 3

Aufgabe 1 (4 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir zunächst beweisen, daß $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ ist. Dazu sei $y(x) = \exp(-x)\exp(x)$. Berechnen Sie jetzt die Ableitung von $y(x)$ sowie $y(0)$. Wie kann man jetzt die Behauptung $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ folgern ? Beweisen Sie nun auf analogem Weg die Funktionalgleichung $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

Lösung:

Nach Produktregel gilt $y'(x) = \exp(-x)(-1)\exp(x) + \exp(-x)\exp(x) = 0$, weiter ist $y(0) = \exp(0)\exp(-0) = 1$. Da die Ableitung von $y(x)$ verschwindet, muss die Funktion konstant sein. Wegen $y(0) = 1$ folgt also $\exp(-x)\exp(x) = 1$ und nach Division von $\exp(x)$ folgt die Behauptung.

Um die Funktionalgleichung zu beweisen, wenden wir den gleichen Trick wie oben an. Gesucht ist also eine der Gleichung äquivalente Formulierung der Form $y(x) = const.$ Dies ist zum Beispiel durch folgende Wahl gegeben

$$y(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)\exp(y)}.$$

Es genügt also zu zeigen, daß $y(x) = 1$ gilt. Wir denken uns dabei y als beliebige Konstante. Mit der Quotientenregel ergibt sich

$$y'(x) = \frac{\exp(x+y)\exp(x)\exp(y) - \exp(x+y)\exp(x)\exp(y)}{(\exp(x)\exp(y))^2} = 0.$$

Weiter ist $y(0) = \exp(y)/\exp(y) = 1$ und die Behauptung folgt analog zum ersten Teil der Aufgabe.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Mitscherlich hat im Jahre 1909 aufgrund von Versuchen (Gefäßkulturen) sein berühmtes Ertragsgesetz aufgestellt. Der Ertrag einer Pflanze ist der Gehalt einer Pflanze an einem bestimmten (i.a. für ihren praktischen Nutzwert maßgeblichen) Stoff pro Einheit Trockenmasse. Man bietet der Pflanze (etwa durch Düngung) zusätzlich zu dem natürlichen Gehalt im Boden die Menge x dieses Stoffes an. Es stellt sich nach einiger Zeit in der Pflanze der Ertrag y ein. Der Ertrag ist dann natürlich eine Funktion der angebotenen Stoffmenge, d.h. $y = y(x)$. Das Ertragsgesetz lautet

$$\frac{d}{dx}y(x) = c(A - y(x)), \qquad y(0) = a$$

wobei c, A und a positive Konstanten bezeichnen.

(a) Interpretieren Sie die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung $y(0) = a$.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung (Tip: Aufgabe 4, letzte Übung).

(c) Welchen Wert hat $y(x)$ für $x \to \infty$? Ist dies realistisch?

Lösung:

(a) Die Anfangsbedingung bedeutet, daß die Pflanze ohne zusätzliche Verabreichung des Stoffes ($x = 0$, keine Düngung) den Ertrag a liefert. An der Differentialgleichung kann man erkennen, daß für $y(x) < A$ der Ertrag der Pflanze mit wachsender Gabe von x zunimmt; denn $y'(x) = c(A - y(x)) > 0$. Wenn man weiter annimmt, daß der Ertrag der Pflanze durch Düngung jedenfalls nicht verkleinert wird, sollte $a < A$ gelten. Würde irgendwann $y(x) > A$ gelten, so wäre $y'(x)$ negativ. Daher spielt A offenbar die Rolle einer oberen Schranke für den Ertrag.

(b) Zur Lösung der Differentialgleichung können wir die Formel aus Aufgabe 4 der 2.Übung mit $\beta = -c$ und $\gamma = cA$ verwenden. Es ergibt sich als allgemeine Lösung

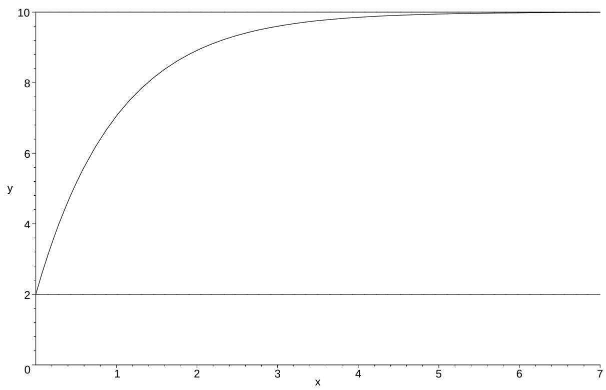
$$\begin{aligned} y(x) &= \left(C + \frac{cA}{-c}\right)\exp(-cx) - \frac{cA}{-c} \\ &= (C - A)\exp(-cx) + A. \end{aligned}$$

Dies ist Lösung für beliebiges $C \in \mathbb{R}$, allerdings erfüllt $y(x)$ noch nicht die Anfangsbedingung $y(0) = a$. Für obiges y gilt $y(0) = C - A + A = C$. Damit also y der Anfangsbedingung genügt, muß man $C = a$ wählen, die gesuchte Funktion ist also $y(x) = (a - A)\exp(-cx) + A$.

(c) Es ist $\lim_{x\to\infty} \exp(-cx) = 0$ für $c > 0$, also

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = A.$$

Falls also $a < A$ gilt, so kann man durch weitere Gabe des Stoffes den Ertrag der Pflanze immer noch erhöhen. Der maximale Wert des Ertrags, der sogenannte Grenzertrag ist durch A gegeben, d.h. es gilt $y(x) < A$ (falls $a < A$). Allerdings ist für große x der Ertrag $y(x)$ dem Grenzertrag A schon sehr nahe, so daß eine zusätzliche Gabe nur noch marginale Änderungen bedeutet, der Grenzertrag selbst kann nie erreicht oder gar übertroffen werden.



Mitscherlich hat sein Gesetz übrigens wie folgt verbal formuliert: "Der Ertragszuwachs ist abhängig von einem jeden Wachstumsfaktor mit einer ihm eigenen Intensität, und zwar ist er proportional (= im gleichen Verhältnis stehend) zu dem am Höchstertrag fehlenden Ertrag".

Aufgabe 3 (vorrechnen):

Das Caesisum-Isotop ^{137}Cs ist ein gefährliches Umweltgift, das sich in radioaktiven Niederschlägen befindet. Es verliert pro Jahr 2.3% seiner Masse durch radioaktiven Zerfall. Jedes Jahr gelange die gleiche Masse M dieses Stoffes in die Umwelt.

(a) Stellen Sie eine Formel auf mit der man berechnen kann, welche Menge des Stoffes nach n Jahren in der Umwelt vorhanden ist. Benutzen Sie hierzu das Summenzeichen und vereinfachen Sie dann die Formel so weit wie möglich (Tip: Aufgabe 3d, 2. Übung).

(b) Welches Gleichgewicht wird sich auf Dauer einstellen ($n \to \infty$) ?

Lösung:

(a) Sei M_n die Masse des Stoffes, die nach n Jahren in der Umwelt ist. Am Anfang ($n = 0$) ist nur die Menge $M_0 = M$ in der Umwelt, nach einem Jahr hat die Anfangsmasse 2.3% ihrer Masse verloren und im Laufe dieses Jahres ist die Masse M in die Umwelt gelangt, es gilt also $M_1 = M + M(1 - 0.023)$. Nach zwei Jahren befindet sich bereits die Masse $M_2 = M + M(1 - 0.023) + M(1 - 0.023)^2$ in der Umwelt, usw. Es gilt also

$$\begin{aligned} M_n &= M + M(1 - 0.023) + M(1 - 0.023)^2 + \ldots + M(1 - 0.023)^n \\ &= M \sum_{k=0}^{n} (1 - 0.023)^k \end{aligned}$$

Es gilt für $0 < q < 1$ (geometrische Reihe):

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Damit ergibt sich als Vereinfachung

$$M_n = M \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für} \quad q := 1 - 0.023 = 0.977.$$

(b) Da unser $q < 1$ ist, gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ und somit $M_n = M/(1-q) = M/0.023 \sim 43.478M$.

Aufgabe 4 (vorrechnen):

Beim Glukose-Toleranztest injiziert man in einem Zeitraum $[0, T]$ einer Person gleichmäßig Glukose, und mißt während und nach dieser Zeit den Glukoseghalt des Blutes. Sei

$\hat{x}$	Normalwert von Glukose im Blut (etwa 85 mg/dl),
$x(t)$	Ist-Wert der Glukose im Blut,
k_0	Reaktionskonstante,
k_1	Glukosezufluß während des Zeitraumes $[0 : T]$.

Dann kann man $x(t)$ im Zeitraum $[0, T]$ durch

$$\frac{d}{dt} x(t) = -k_0(x(t) - \hat{x}) + k_1, \qquad x(0) = \hat{x}$$

beschreiben und im Zeitraum (T, ∞) durch

$$\frac{d}{dt} x(t) = -k_0(x(t) - \hat{x}).$$

(a) Interpretieren Sie die Differentialgleichung.

(b) Lösen Sie die Gleichungen. Welche Anfangsbedingung muß man für die zweite Gleichung zum Zeitpunkt $t = T$ wählen?

(c) Zeichnen Sie die Lösung qualitativ.

Lösung:

(a) Die erste Differentialgleichung beschreibt die Veränderung des Glukosewerts während der Zufuhr. Es wird von einem konstanten Zufluß k_0 ausgegeangen. Der Abbau der Glukose ist proportional zur Differenz des Ist-Werts und des Normalwerts der Glukose mit der Reaktionskonstante k_0 als Faktor. In der zweiten Differentialgleichung wird der Glukosegehalt nach der Injizierung beschrieben, der konstante Glukosezufluß k_1 fällt daher weg. Diese Gleichung beschreibt also den Abbau der Glukose bis auf den Normnalwert $\hat{x}$ im Velauf der Zeit.

(b) Analog zu Aufgabe 2 kann man auch hier die 4.Aufgabe der 2.Übung (mit $\beta = -k_0$ und $\gamma = k_0\hat{x} + k_1$) anwenden. Es folgt:

$$x(t) = \left(C - \hat{x} - \frac{k_1}{k_0}\right) \exp(-k_0 t) + \hat{x} + \frac{k_1}{k_0},$$

wobei aufgrund der Anfangsbedingung $C = \hat{x}$ gewählt werden muß. Also lautet die Lösung der ersten Gleichung

$$x(t) = \frac{k_1}{k_0} (1 - \exp(-k_0 t)) + \hat{x}.$$

Zum Zeitpunkt T beträgt also der Ist-Wert der Glukose $x_T = x(T)$ mit

$$x(T) = \frac{k_1}{k_0} (1 - \exp(-k_0 T)) + \hat{x}.$$

Dies muss nun also als neue Anfangsbedingung an die zweite Gleichung gestellt werden. Die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = (C - \hat{x}) \exp(-k_0 t) + \hat{x}.$$

Die Konstante C berechnet sich hier aus der Bedingung $x(T) = x_T$, also

$$\begin{aligned}
& (C - \hat{x}) \exp(-k_0 T) + \hat{x} = \frac{k_1}{k_0} (1 - \exp(-k_0 T)) + \hat{x} \\
\Leftrightarrow \qquad & (C - \hat{x}) \exp(-k_0 T) = \frac{k_1}{k_0} (1 - \exp(-k_0 T)) \\
\Leftrightarrow \qquad & C - \hat{x} = \frac{k_1}{k_0} (\exp(k_0 T) - 1) \\
\Leftrightarrow \qquad & C = \hat{x} + \frac{k_1}{k_0} (\exp(k_0 T) - 1)
\end{aligned}$$

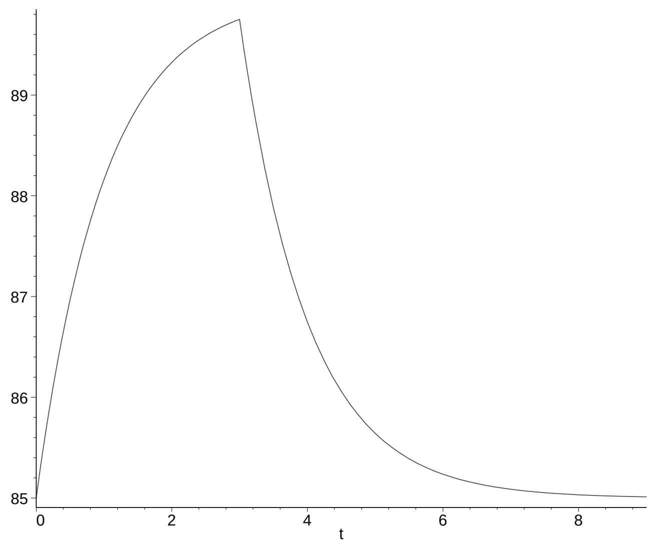
Als Lösung für $t > T$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{k_1}{k_0} (\exp(k_0 T) - 1) \exp(-k_0 t) + \hat{x} \\
&= \frac{k_1}{k_0} (\exp(k_0 (T - t)) - \exp(-k_0 t)) + \hat{x}.
\end{aligned}$$

Der Ist-Wert der Glukose wird also durch folgende Funktion beschrieben:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{k_1}{k_0} (1 - \exp(-k_0 t)) + \hat{x} & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ \frac{k_1}{k_0} (\exp(k_0 (T - t)) - \exp(-k_0 t)) + \hat{x} & \text{für } T \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

(c) Das folgende Diagramm zeigt die Lösung $x(t)$ für folgende Parameterwerte: $\hat{x} = 85, k_0 = 1, k_1 = 5, T = 3$



Man erkennt, daß der Glukosegehalt während des Injizierens stark ansteigt, nach dieser Zeit nimmt er exponentiell ab und konvergiert für $T \to \infty$ gegen den Normalwert $\hat{x}$.