Universität Köln
Angewandte Mathematik
Johannes Müller
Michael Kurth

Mathematik für Biologen I, WS 01/02

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kuepper/biologie.html

Mathematisches Institut
Raum 116/117
Tel: 0221/4702891

Lösungshinweise zu Übungsblatt Nr. 4

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Berechnen Sie die Taylor-Polynome (um $x_0 = 0$) von $f(x) = \sin(x)$ der Ordnung $n = 0, 1, 2, 3$ und zeichnen Sie diese zusammen mit $\sin(x)$ für $-\pi \leq x \leq \pi$ in ein Koordinatensystem. Wie sieht die Taylor-Reihe von $\sin(x)$ aus ?

Lösung:

Um die Taylor-Polynome zu bestimmen, benötigen wir die ersten 3 Ableitungen von $\sin(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin(x))' = \cos(x) \;\Rightarrow\; f'(0) = \cos(0) = 1 \\ f''(x) &= (\cos(x))' = -\sin(x) \;\Rightarrow\; f''(0) = -\sin(0) = 0 \\ f'''(x) &= (-\sin(x))' = -\cos(x) \;\Rightarrow\; f'''(0) = -\cos(0) = -1. \end{aligned}$$

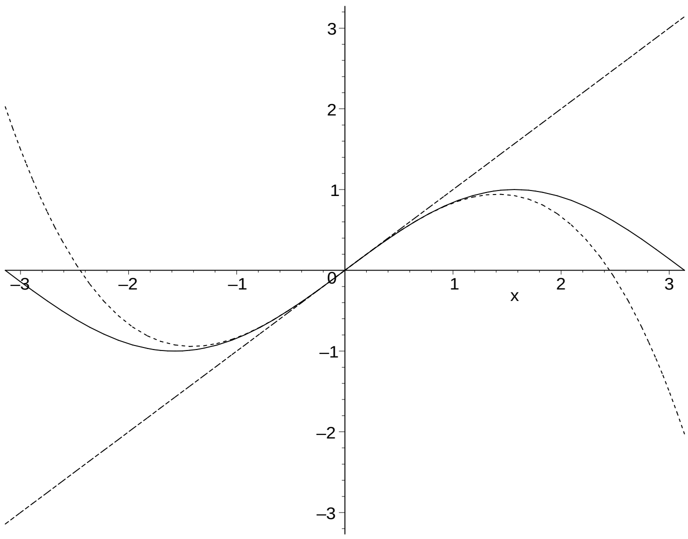
Das Taylor-Polynom n-ter Ordnung berechnet sich als

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dx^i} f(0) x^i = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{6} f'''(0)x^3 + \dots$$

Mit Hilfe obiger Ableitungen ist also

$$\begin{aligned} p_0(x) &= f(0) = 0 \\ p_1(x) &= f(0) + f'(0)x = x \\ p_2(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 = x \\ p_3(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{6} f'''(0)x^3 = x - \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Das zugehörige Diagramm sieht wie folgt aus:



Dabei ist $\sin(x)$ die durchgezogene, $p_1(x) = p_2(x) = x$ die gestrichelte und $p_3(x) = x - x^3/6$ die gepunktete Line. Man erkennt, daß sich die Taylor-Polynome mit wachsendem n immer besser der Funktion anschmiegen.

Um die Taylor-Reihe zu bestimmen, benötigen wir eine Formel für die i-te Ableitung an der Stelle 0. Offenbar gilt für die vierte Ableitung $f''''(x) = \sin(x) = f(x)$ und daher ist die fünfte Ableitung identisch mit der ersten usw. Dies bedeutet

$$
\begin{aligned}
i \text{ gerade, also } i = 2k: &\ \frac{d^n}{dx^n} f(x) = (-1)^k \sin(x) \Rightarrow \frac{d^n}{dx^n} f(x)(0) = 0 \\
i \text{ gerade, also } i = 2k+1: &\ \frac{d^n}{dx^n} f(x)(x) = (-1)^k \cos(x) \Rightarrow \frac{d^n}{dx^n} f(x)(0) = (-1)^k
\end{aligned}
$$

Damit fallen in der Taylor-Reihe alle geraden Potenzen weg, wir summieren dann statt i über k und erhalten

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dx^i} f(0) x^i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{d^{\,2k+1}}{dx^{2k+1}} f(0) x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Um dies zu überprüfen, kann man die ersten Glieder der Summe mit den oben berechneten Taylor-Polynomen vergleichen.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Bestrahlt man gewisse Stämme von Tabak-Viren (z.B. Ancuba) mit Röntgenstrahlen der Dosis R, so wird ein Teil der Viren inaktiviert. Die Anzahl der überlebenden Viren $N(R)$ nimmt dabei exponentiell mit der Röntgendosis ab:

$$N(R) = N_0 \exp(-\sigma R).$$

Hierbei ist die Zerfallskonstante $\sigma > 0$ abhämgig vom Biotop.

(a) Welche Bedeutung hat N_0 ?

(b) Welche Differentialgleichung beschreibt die Anzahl überlebender Viren ?

(c) Sei nun $\sigma = 0.2$. Welche Dosis R ist erforderlich, um 90% der Viren zu inaktivieren ?

Lösung:

(a) Es ist $N(0) = N_0$, also beschreibt N_0 die Anzahl der Viren, die ohne Bestrahlung existieren.

(b) Es gilt $N'(R) = -\sigma N_0 \exp(-\sigma R) = -\sigma N(R)$, also ist die gesuchte Differentialgleichung $N' = -\sigma N$.

(c) Um 90% der Viren zu inaktivieren ist die Dosis R erforderlich für die gilt

$$\frac{N(R)}{N_0} = 10\% = 1/10$$

Also ist die Dosis R mit $\exp(-\sigma R) = 1/10$ gesucht. Unter Benutzung des Logarithmus rechnen wir nun

$$
\begin{aligned}
& \exp(-\sigma R) = 1/10 \\
\Leftrightarrow\quad & -\sigma R = \ln(1/10) = -\ln(10) \\
\Leftrightarrow\quad & R = \frac{\ln(10)}{\sigma} = \frac{\ln(10)}{2/10} = 5\ln(10) \sim 11.5129.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 (vorrechnen):

Bei der C^{14}-Methode zur Altersbestimmung nutzt man aus, daß in lebenden Organismen das Verhältnis von C^{14} und C^{12} einen festen Wert c_0 hat. In toten Organismen zerfällt das Isotop C^{12} praktisch nicht, während das Isotop C^{14} mit einer Halbwertszeit von 5760 Jahren zerfällt (d.h. nach 5760 Jahren ist nur noch ein die Hälfte des Isotops vorhanden). Im Nildelta wurde 1989 ein hölzerner Bootsbalken gefunden, bei dem das Verhältnis von C^{12} auf 75% von c_0 gesunken war. Bestimmen Sie das Alter des Balkens.

Lösung:

Sei t_0 das Alter des Balkens im Jahre 1989. Wir wenden das Zerfallsgesetz an und erhalten

$$
\begin{aligned}
& c_0 \exp(-\sigma t_0) = 0.75 c_0 = \frac{3}{4} c_0 \\
\Leftrightarrow\quad & \exp(-\sigma t_0) = \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & -\sigma t_0 = \ln(3/4) \\
\Leftrightarrow\quad & t_0 = -\frac{\ln(3/4)}{\sigma}.
\end{aligned}
$$

Allerdings ist die Zerfallskonstante σ noch unbekannt, diese berechnet sich aus der bekannten Halbwertszeit von 5760 Jahren wie folgt:

$$\begin{aligned} & \exp(-5760\sigma) = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & -5760\sigma = \ln(1/2) = -\ln(2) \\ \Leftrightarrow \quad & \sigma = \frac{\ln(2)}{5760}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$t_0 = -5760 \frac{\ln(3/4)}{\ln(2)} \sim 2390.616$$

Der Bootsbalken ist demnach heute ungefähr 2402 Jahre alt.

Aufgabe 4 (vorrechnen):

Die logistische Differentialgleichung

$$y'(x) = ay(x)(1 - y(x))$$

wurde von Verhulst (1838) zur Untersuchung von Populationsdynamiken eingeführt und spielt in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle.

(a) Zeigen Sie: Die Funktion

$$\operatorname{logit}(x) = \frac{\exp(ax+b)}{1+\exp(ax+b)}$$

ist Lösung der logistischen Differentialgleichung.

(b) Wie muss man die Konstante b wählen, so daß die Anfangsbedingung $y(0) = c$ erfüllt ist ?

(c) Zeichnen Sie $\operatorname{logit}(x)$ für $b = 0$ und $a = 1$ bzw. $a = -1$ zwischen $x = -5$ und $x = 5$.

(d) Berechnen Sie die Ableitung der Inversen von $y = \operatorname{logit}(x)$ an der Stelle $y = 1/2$ durch

1. Anwenden der Formel über die Ableitung der Umkehrfunktion,
2. explizites Berechnen der Umkehrfunktion und deren Ableitung.

Lösung:

(a) Um zu beweisen, daß $y(x) = \operatorname{logit}(x)$ die logistische Differentialgleichung löst, müssen wir die Ableitung berechnen. Es gilt zunächst durch Erweitern mit $\exp(-(ax+b))$:

$$y(x) = \frac{1}{\exp(-(ax+b))+1}.$$

Mit Hilfe der Quotientenregel folgt

$$y'(x) = -\frac{\frac{d}{dx}\left(\exp(-(ax+b))+1\right)}{\left(\exp(-(ax+b))+1\right)^2} = a\frac{\exp(-(ax+b))}{\left(\exp(-(ax+b))+1\right)^2}.$$

Wir müssen nun zeigen, daß dies identisch der rechten Seite ist, also

$$\begin{aligned} ay(x)\left(1-y(x)\right) = ay(x) - ay(x)^2 &= a\frac{1}{\exp(-(ax+b))+1} - a\frac{1}{(\exp(-(ax+b))+1)^2} \\ &= a\left(\frac{\exp(-(ax+b))+1}{(\exp(-(ax+b))+1)^2} - \frac{1}{(\exp(-(ax+b))+1)^2}\right) \\ &= a\frac{\exp(-(ax+b))}{\left(\exp(-(ax+b))+1\right)^2}, \end{aligned}$$

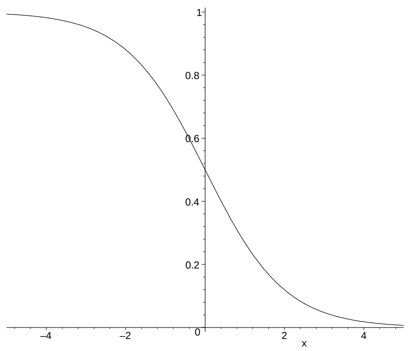
was zu beweisen war.

(b) Gesucht ist das b für das $y(0) = c$ gilt. Wegen dem zweiten Teil von Aufgabenteil (d) berechnen wir hier zunächst die Umkehrfunktion und setzen dann $x = 0$ ein. Es ist

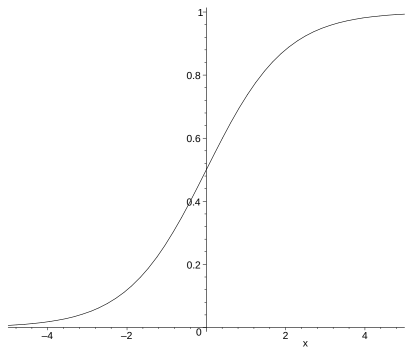
$$\begin{aligned}
&\operatorname{logit}(x) = \frac{1}{\exp(-(ax+b))+1} = c \\
\Leftrightarrow\quad & \exp(-(ax+b)) + 1 = \frac{1}{c} \\
\Leftrightarrow\quad & -(ax+b) = \ln\left(\frac{1}{c} - 1\right) = \ln\left(\frac{1-c}{c}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & ax = -\ln\left(\frac{1-c}{c}\right) - b \\
\Leftrightarrow\quad & x = -\frac{1}{a}\left(\ln\left(\frac{1-c}{c}\right) + b\right),
\end{aligned}$$

also ist die korrekte Wahl $b = -\ln((1-c)/c)$.

(c) Die folgenden Diagramme zeigen $\operatorname{logit}(x)$ für $b = 0$ und $a = \pm 1$:



$\operatorname{logit}(x)$ für $a = -1, b = 0$.



$\operatorname{logit}(x)$ für $a = 1, b = 0$.

(d)

1. Sei $f(y) = \operatorname{logit}^{-1}(y)$ die Umkehrfunktion von logit. Wir wissen $f(\operatorname{logit}(x)) = x$, also folgt durch Ableiten unter Benutzung der Kettenregel

$$f'(\operatorname{logit}(x))\operatorname{logit}'(x) = 1 \;\Rightarrow\; f'(\operatorname{logit}(x)) = \frac{1}{\operatorname{logit}'(x)}$$

Wir müssen also die Ableitung von logit an der Stelle x mit $\operatorname{logit}(x) = 1/2$ berechnen. Es gilt nach Aufgabenteil (a)

$$\operatorname{logit}'(x) = a\operatorname{logit}(x)(1 - \operatorname{logit}(x)).$$

Für unser x mit $\operatorname{logit}(x) = 1/2$ folgt also $\operatorname{logit}'(x) = a/2(1-1/2) = a/4$ und insgesamt

$$f'(1/2) = 1/(a/4) = 4/a.$$

2. Nach Aufgabenteil (b) ist die Umkehrfunktion als

$$f(y) = -\frac{1}{a}\left(\ln\left(\frac{1-y}{y}\right) + b\right)$$

bekannt. Wir berechnen mit Hilfe von Ketten- und Quotientenregel

$$\begin{aligned}
f'(y) &= -\frac{1}{a}\frac{\frac{d}{dy}\left(\frac{1-y}{y}\right)}{\frac{1-y}{y}} = -\frac{1}{a}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y} - 1\right)\frac{y}{1-y} \\
&= -\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\frac{y}{1-y} \\
&= \frac{1}{ay(1-y)},
\end{aligned}$$

also wie in 1.

$$f'(1/2) = \frac{1}{a/2(1-1/2)} = \frac{1}{a/4} = \frac{4}{a}$$