

Lösungshinweise zu Übungsblatt Nr. 6

Aufgabe 1 (8 Punkte):

Um die Artenvielfalt von Bäumen in einem sibirischen Mischwald zu untersuchen werden in insgesamt 6 jeweils 1 Hektar groß Parzellen die verschiedenen Arten $A_1, A_2, \dots$ bestimmt. Insgesamt wurden 6 Arten gefunden, die genauen Daten lassen sich folgender Tabelle entnehmen:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1. Parzelle	x		x			
2. Parzelle		x		x	x	
3. Parzelle					x	x
4. Parzelle	x	x	x			
5. Parzelle		x		x		
6. Parzelle			x		x	

Berechnen Sie den Jackknife-Schätzer für die Anzahl der verschiedenen Baumarten in dem Mischwald.

Lösung:

Wir berechnen also wie in der Vorlesung die Jackknife-Schätzer bei weggelassener i -ter Parzelle für $i = 1, \dots, 6$. Insgesamt haben wir 6 verschiedene Baumarten entdeckt. Lassen wir die erste Parzelle weg, so erkennen wir, daß all diese Arten auch in einer der anderen fünf Parzellen auftauchen. Es ist also

$$Z_6^{(1)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6$$

Analog lassen sich die anderen Werte berechnen:

$$Z_6^{(2)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6$$

$$Z_6^{(3)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = 11$$

$$Z_6^{(4)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6$$

$$Z_6^{(5)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6$$

$$Z_6^{(6)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6$$

Der gesuchte Jackknife-Schätzer ist nun der Mittelwert aus diesen Werten:

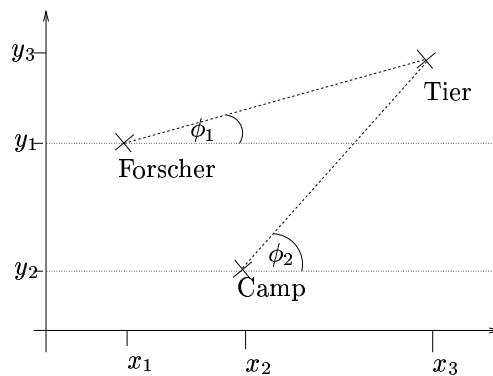
$$\hat{Z}_6 = \frac{1}{6}(6 + 6 + 11 + 6 + 6 + 6) = \frac{41}{6} \sim 6.833.$$

Wir runden den Wert auf 7 auf und schätzen, daß es 7 verschiedene Baumarten gibt.

Falls wir die Art A_6 in der dritten Parzelle nicht gefunden hätten, so wäre unser Schätzer übrigens 5 gewesen.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Ein Forscher möchte die Bewegungen eines Tieres beobachten. Dazu wird das Tier mit einem Peilsender ausgestattet. Mit Hilfe eines Empfängers kann der Forscher nun die Richtung orten, in der das Tier sich aufhält. Einen weiteren Empfänger hat er in einem festen Camp angebracht, vgl. dazu folgende Skizze:



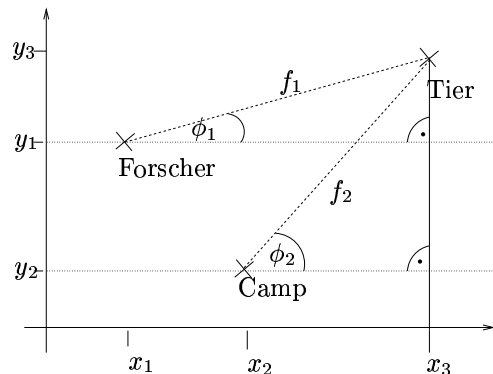
Die Position des Forschers sei also (x_1, y_1) , die des Camps (x_2, y_2) und die des Tieres (x_3, y_3) , die jeweiligen Winkel zur x -Achse seien mit ϕ_1 und ϕ_2 bezeichnet. Angenommen, die Position des Tieres sei bekannt, wie lauten dann die Winkel ϕ_1 und ϕ_2 ?

Zusatzfrage (2 Extrapunkte):

Wenn nur die Winkel und die Position des Forschers und des Camps bekannt sind, wie kann man dann die Position des Tieres errechnen ?

Lösung:

Wir werden die Winkel ϕ_1 und ϕ_2 mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen bestimmen. Dazu ziehen wir eine Hilfslinie durch (x_3, y_3) parallel zur y -Achse und erhalten auf diese Art zwei rechtwinklige Dreiecke:



Wegen $\tan(\alpha) = \text{Gegenkathete}/\text{Ankathete}$ sind die gesuchten Winkel nun die in $(-\pi/2, \pi/2)$ eindeutig bestimmten Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$\tan(\phi_1) = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}, \quad \tan(\phi_2) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}.$$

Mit Hilfe des arctan lassen sich die Winkel explizit als

$$\phi_1 = \arctan\left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\right), \quad \phi_2 = \arctan\left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right)$$

bestimmen.

Seien nun die Winkel ϕ_1 und ϕ_2 bekannt. Wir wollen den Aufenthaltsort des Tieres bestimmen. Dieser liegt gerade da, wo sich die beiden Verbindungsgeraden zwischen Forscher und Tier (f_1) bzw. zwischen Camp und Tier (f_2) treffen. Für die Geradengleichungen gilt nach sogenannter "Punkt-Steigungs-Formel"

$$f_1(x) = y_1 + \tan(\phi_1)(x - x_1).$$

Analog ist

$$f_2(x) = y_2 + \tan(\phi_2)(x - x_2).$$

Wir suchen nun den Schnittpunkt, setzen also $f_1(x) = f_2(x)$ und erhalten

$$\begin{aligned} y_1 + \tan(\phi_1)(x - x_1) &= y_2 + \tan(\phi_2)(x - x_2) \\ \Rightarrow (\tan(\phi_1) - \tan(\phi_2))x &= y_2 - y_1 + \tan(\phi_1)x_1 - \tan(\phi_2)x_2 \\ \Rightarrow x_3 = x &= \frac{y_2 - y_1 + \tan(\phi_1)x_1 - \tan(\phi_2)x_2}{\tan(\phi_1) - \tan(\phi_2)}. \end{aligned}$$

Wir erkennen, daß wir $\tan(\phi_1) \neq \tan(\phi_2)$ fordern müssen, um die Gleichung zu lösen. Dies ist auch anschaulich klar, denn falls der Forscher auf der Verbindungslinie zwischen Camp und Tier steht, kann man keine Aussage über die Entfernung des Tieres treffen. Die zugehörige y -Koordinate erhält man durch Einsetzen von x_3 in eine der beiden Funktionen f_1 oder f_2 :

$$y_3 = f_1(x_3) = y_1 + \tan(\phi_1) \left(\frac{y_2 - y_1 + \tan(\phi_1)x_1 - \tan(\phi_2)x_2}{\tan(\phi_1) - \tan(\phi_2)} - x_1 \right).$$

Aufgabe 3 (vorrechnen):

In dieser Aufgabe soll die "Güte" des Jackknife-Algorithmus an einem konkreten Beispiel verdeutlicht werden: Das Ziel ist es, die Anzahl der Seiten eines Würfels (bekanntlich 6 ;-)) zu schätzen. Dazu nehme man einen Würfel zur Hand und werfe ihn sechs Mal. Nun trage man in folgende Tabelle ein Kreuz ein, falls im i -ten Wurf die Ziffer k geworfen wurde.

	1	2	3	4	5	6
1. Wurf						
2. Wurf						
3. Wurf						
4. Wurf						
5. Wurf						
6. Wurf						

Berechnen Sie nun anhand der Tabelle den Jackknife-Schätzer für die Zahl der Seiten eines Würfels.

Das Ergebnis ist natürlich abhängig von den Würfeln. Bei der Beurteilung der Güte des Verfahrens beachte man, daß eine naive Schätzung so gut wie nie 6 Seiten ergeben würde.

Lösung:

Unser Experiment liefert folgende Tabelle

	1	2	3	4	5	6
1. Wurf				x		
2. Wurf	x					
3. Wurf				x		
4. Wurf				x		
5. Wurf			x			
6. Wurf		x				

Es traten 4 verschiedene Flächen (1,2,3,4) auf, der naive Schätzwert wäre hier also 4. Nun wenden wir Jackknife an. Lassen wir den ersten Wurf weg, so hätten wir in den anderen Würfeln die bekannten 4 Seiten trotzdem gesehen, also

$$Z_6^{(1)} = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 4$$

Analog gehen wir mit den anderen Würfeln vor und erhalten

$$Z_6^{(2)} = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 9$$

$$Z_6^{(3)} = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 4$$

$$Z_6^{(4)} = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 4$$

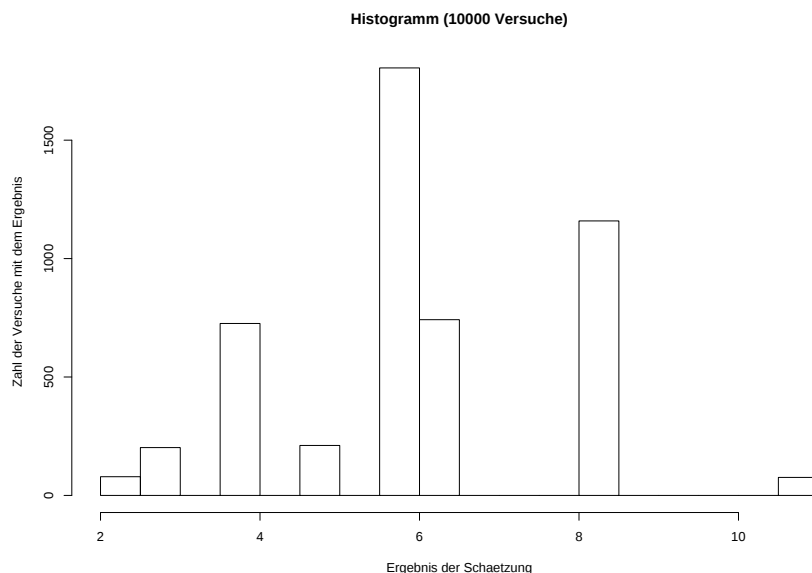
$$Z_6^{(5)} = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 9$$

$$Z_6^{(6)} = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 9$$

Der Mittelwert ist also

$$\hat{Z}_6 = \frac{1}{6}(4 + 9 + 4 + 4 + 9 + 9) \frac{39}{6} \sim 6.5.$$

Obwohl wir also nach unseren Würfeln nur von 4 Seiten ausgehen konnten, liefert der Jackknife-Schätzwert einen Wert, der nahe am richtigen Wert von 6 liegt. Dieses Ergebnis ist natürlich abhängig von unserem Experiment. Die folgende Grafik zeigt ein Histogramm von 10000 Versuchen mit 6 Würfeln.



Aufgabe 4 (vorrechnen):

In vielen Problemen der Biologie spielen Zeitverzögerungen eine wichtige Rolle. In diesem Zusammenhang werden oft Differentialgleichungen mit Zeitverzögerung untersucht. Hier betrachten wir das Problem

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(t - \tau).$$

- (a) Für welche τ ist nun $x(t) = \sin(t)$ eine Lösung obiger Gleichung ?

Tip: Nach dem Ableiten von $x(t)$ erhält man eine Gleichung, die man analytisch, aber auch durch Nachdenken, lösen kann.

- (b) Sei $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \exp(-x\tau)$, $\tau > 0$. Besitzen die Funktionen f_1 und f_2 einen Schnittpunkt, d.h. existiert eine Lösung der Gleichung $f_1(x) = f_2(x)$?
- (c) Sei nun $\tau > 0$. Zeigen Sie, daß auch eine Lösung der Form $y(t) = \exp(at)$ existiert.

Tip: Teil (b) der Aufgabe benutzen.

Lösung:

- (a) Wir setzen $x(t) = \sin(t)$ in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$\cos(t) = \sin(t - \tau)$$

Wir wissen, daß $\cos$ und $\sin$ um $\pi/2$ in der Phase verschoben sind, d.h. $\sin(t + \pi/2) = \cos(t)$. Also ist $\tau = -\pi/2$ eine Lösung. Wegen der 2π -Periodizität sind nun auch $-\pi/2 + 2\pi = 3\pi/2$, $-\pi/2 + 4\pi = 7\pi/2, \dots$ Lösungen. Insgesamt ist also $\sin(t)$ genau für die folgenden τ -Werte Lösung:

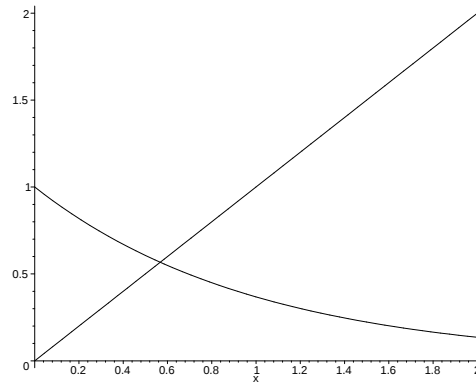
$$\tau = \frac{\pi}{2}(2k - \frac{1}{2}) \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \text{ beliebig}$$

Analytisch folgt aus dem Additionstheorem für $\sin(t - T)$:

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \sin(t) \cos(\tau) - \cos(t) \sin(\tau) \\ \Rightarrow \frac{\cos(t)}{\sin(t)} &= \frac{\cos(\tau)}{\sin(\tau) + 1} \end{aligned}$$

Die linke Seite verändert sich nun mit t , die rechte nicht. Daher kann obige Formel nicht stimmen, d.h. wir haben durch Null dividiert. Dies ist genau dort der Fall, wo $\sin(\tau) = -1$, was genau den oben errechneten Werten entspricht. Da dort auch $\cos(\tau) = 0$ gilt, sind diese τ dann auch Lösungen.

- (b) Es ist $f_1(0) = 0$ und $f_2(0) = 1$. f_1 ist nun monoton steigend und f_2 für $a > 0$ monoton fallend. Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = 0$ muss es also einen Schnittpunkt der beiden Funktionen geben. Dies sei an folgender Skizze noch einmal verdeutlicht:



- (c) Wir setzen $y(t) = \exp(at)$ in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$a \exp(at) = \exp(a(t - \tau)) = \exp(at) \exp(-a\tau)$$

Kürzen durch $\exp(at)$ liefert die Gleichung

$$a = \exp(-a\tau),$$

welche für positive τ nach Aufgabenteil (b) eine Lösung a besitzt.

Aufgabe 5 (Wiederholung):

Geben Sie jeweils die erste Ableitung an:

- (a) $f_1(x) = \sqrt{\exp(x)}$
- (b) $f_2(x) = x / \sin(x^2)$
- (c) $f_3(x) = \sin(x) / \cos(x)$
- (d) $f_4(x) = \ln(x^2)$

Lösung:

- (a) Es gilt

$$f_1'(x) = \frac{\exp(x)}{2\sqrt{\exp(x)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\exp(x)}.$$

- (b) Es gilt

$$f_2'(x) = \frac{\sin(x^2) - 2x^2 \cos(x^2)}{(\sin(x^2))^2}.$$

- (c) Es gilt $f_3(x) = \tan(x)$ und

$$f_3'(x) = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$$

- (d) Es gilt

$$f_4'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}.$$