Universität Köln
Angewandte Mathematik
Johannes Müller
Michael Kurth

Mathematik für Biologen I, WS 01/02

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kuepper/biologie.html

Mathematisches Institut
Raum 116/117
Tel: 0221/4702891

Lösungshinweise zu Übungsblatt Nr. 7

Aufgabe 1 (8 Punkte):

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen jeweils ohne Verwendung einer Wertetafel (wo sind Nullstellen, Maxima, usw.) zwischen 0 und 4π.

(a) $f_1(x) = \sin(x)$

(b) $f_2(x) = 2\sin(x)$

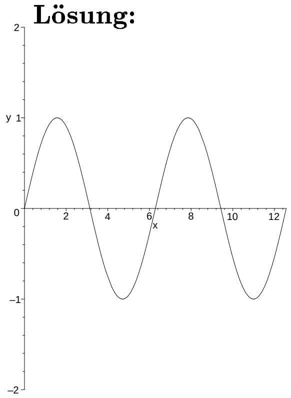
(c) $f_3(x) = 2\sin(x + \pi)$

(d) $f_4(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x + \pi)$

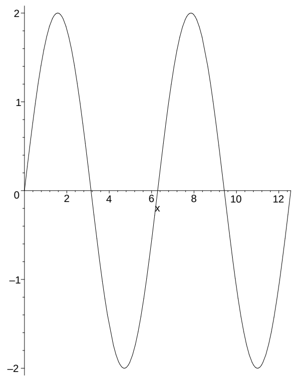
(e) $f_5(x) = 2\sin(2x + \pi)$

(f) $f_6(x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{2}) + 3$

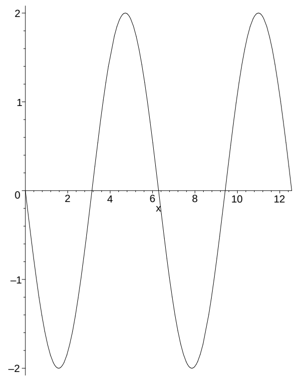
Lösung:



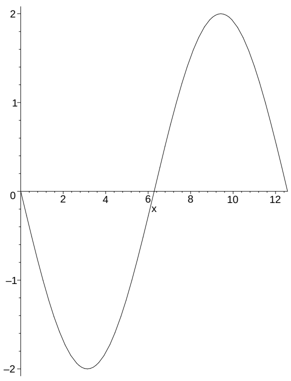
(a) $f_1(x) = \sin(x)$



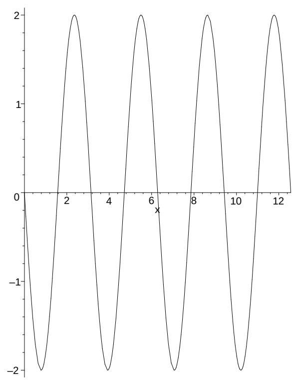
(b) $f_2(x) = 2\sin(x)$



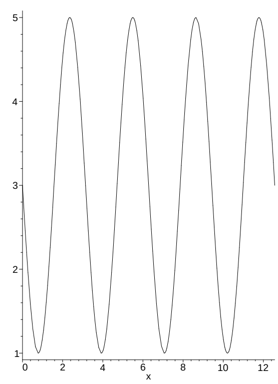
(c) $f_3(x) = 2\sin(x + \pi)$



(d) $f_4(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x + \pi)$



(e) $f_5(x) = 2\sin(2x + \pi)$



(f) $f_6(x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{2}) + 3$

In (a) wird die bekannte sin-Funktion gezeichnet, die Nullstellen sind $2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ beliebig. In (b) wird nur die Amplitude verdoppelt. In (c) wird dann der sinus um die Phase π verschoben. In (d) und (e) wird die Frequenz der Funktion aus (c) verdoppelt bzw. halbiert, und in (f) ist aufgrund der Phasenverschiebung um $\pi/2$ von sin und cos die Funktion identisch mit der aus (e), allerdings um 3 nach oben verschoben.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = \sin(2t) + \sqrt{3}\cos(2t).$$

Berechnen Sie Amplitude R, Frequenz ω und Phase φ_0 von f und skizzieren die Funktion ohne Verwendung einer Wertetafel.

Lösung: Gesucht ist also eine Darstellung der Form

$$f(t) = R\sin(\omega t + \varphi_0)$$

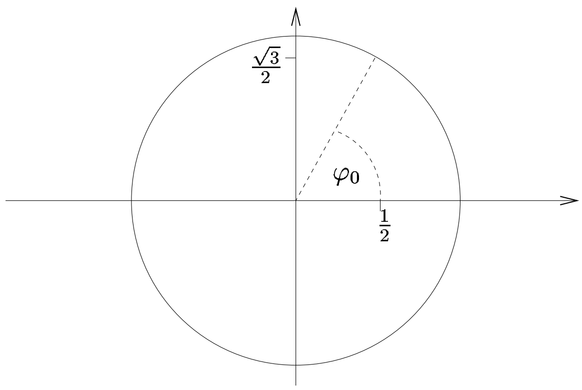
Wir erinnern uns, daß dies bereits in der Vorlesung untersucht wurde (hier: $A = B = 1, \omega = 2$). Analog zu dem dortigen Vorgehen schreiben wir

$$f(t) = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}}\sin(2t) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}}\cos(2t)\right) = 2\left(\frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2t)\right).$$

Wegen $(1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 = 1$ existiert nun ein Winkel φ_0 mit

$$\cos(\varphi_0) = \frac{1}{2}, \quad \sin(\varphi_0) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

also $\varphi_0 = \pi/3$.

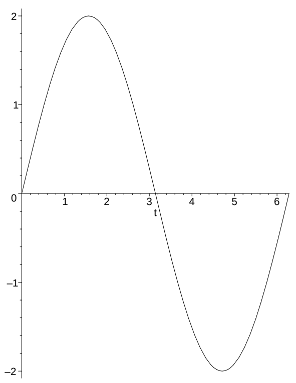


Graphische Bestimmung von φ_0

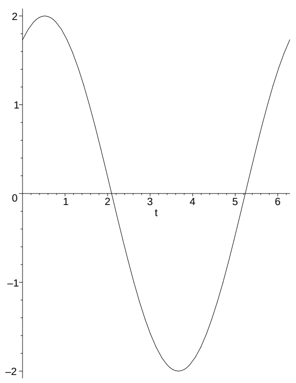
Damit haben wir also folgende Darstellung für f gefunden:

$$f(t) = 2\sin(2t + \frac{\pi}{3})$$

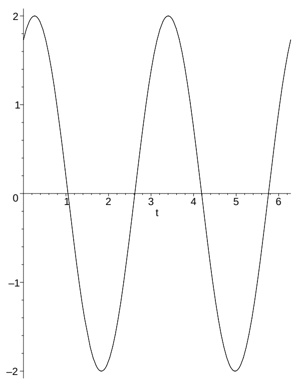
Demnach ist die Amplitude $R = 2$, die Frequenz $\omega = 2$ und die Phase $\varphi_0 = \pi/3$.



$2\sin(x)$



$2\sin(x + \pi/3)$



$2\sin(2x + \pi/3)$

Aufgabe 3 (vorrechnen):

In dieser Aufgabe betrachten wir die Schwingungsgleichung (für $k > 0$)

$$\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

zusammen mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = v(0) = -1$. Wie lautet die Lösung ? Sei nun $k = 4$. Zeichnen Sie $x(t)$ und $\dot{x}(t) = v(t)$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ jeweils in ein Koordinatensystem ein. Tragen Sie dann in einem weiteren Koordinatensystem x gegen v auf.

Tip : Zum Lösen der Differentialgleichung muss die in der Vorlesung angegebene Lösung noch an die Anfangsbedingungen angepasst werden.

Lösung: Nach Vorlesung hat die Lösung der Schwingungsgleichung folgende Gestalt, wobei $\omega = \sqrt{k}$:

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t).$$

Um dies an die Anfangsbedingungen anzupassen, setzen wir $t = 0$. Es ist

$$1 = x(0) = A\sin(0) + B\cos(0) = B,$$

also muss $B = 1$ gelten. Für die zweite Bedingung müssen wir zunächst v, also $\dot{x}$ berechnen:

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t).$$

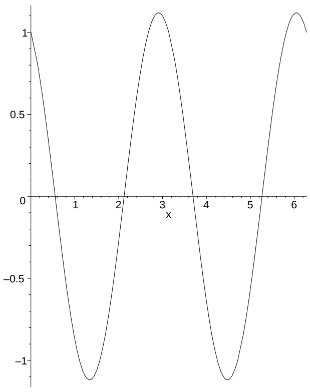
Setzen wir die Anfangsbedingung ein, so folgt

$$-1 = v(0) = \dot{x}(0) = A\omega\cos(0) - B\omega\sin(0) = A\omega,$$

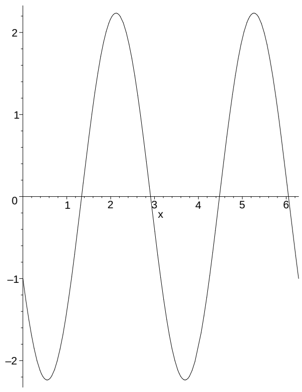
also $A = -1/\omega$. Die Lösung lautet also

$$x(t) = -\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}t) + \cos(\sqrt{k}t)$$

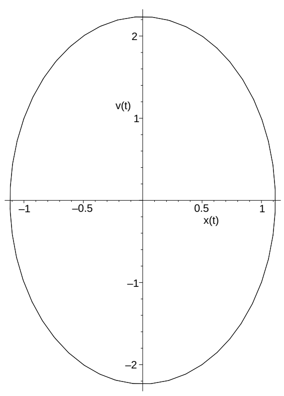
Die folgenden Skizzen gelten für $k = 4$:



$x(t) = -\frac{1}{2}\sin(2t) + \cos(2t)$



$v(t) = -\cos(2t) - 2\sin(2t)$



$x(t)$ gegen $v(t)$

Dabei trägt man $x(t)$ gegen $v(t)$ wie folgt auf. Für verschiedene t-Werte wird der zugehörige x und v-Wert errechnet, der dann in das Koordinatensystem eingetragen wird. Die daraus resultierende Kurve wird dann in der üblichen Art und Weise gewonnen. Mit solchen Diagramme werden wir und im weiteren Verlauf der Vorlesung noch näher beschäftigen.

Aufgabe 4 (vorrechnen):

Die Körpertemperatur einer Frau ist bestimmt durch einen täglichen und eine monatlichen Zyklus. Die durchschnittliche Temperatur beträgt 36.8^o. Für die beiden Zyklen gelte:

- "täglicher Zyklus": Periode $T = 1$ Tag, Amplitude $R = 0.3$, Phase $\varphi_0 = -2\pi \cdot 8/24$
- "monatlicher Zyklus": Periode $T = 28$ Tage, Amplitude $R = 0.2$, Phase $\varphi_0 = -2\pi \cdot 9/28$

Stellen Sie die zu den einzelnen Zykeln gehörigen Funktionen in Abhängigkeit von t [Tage] auf und skizzieren sie diese innerhalb ihrer jeweiligen Periode. Zu welchem Zeitpunkt ist jeweils die Temperatur am höchsten ? Setzen Sie nun die beiden Funktionen zusammen und skizzieren Sie den Verlauf (ohne Wertetafel, nachdenken !). Wie hoch ist der maximale Wert der Körpertemperatur und wann wird dieser erreicht ?

Lösung:

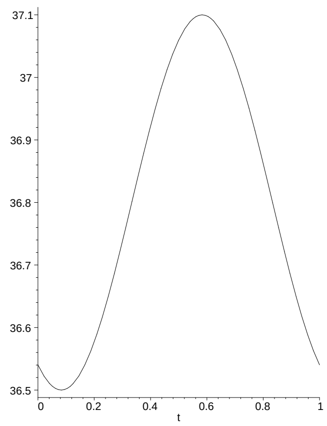
Zunächst stellen wir mit den uns bekannten Daten die Funktion auf, die den täglichen Temperaturzyklus beschreibt:

$$f_1(t) = 36.8 + R\sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0) = 36.8 + 0.3\sin(2\pi \cdot t - 2\pi \cdot 8/24) = 36.8 + 0.3\sin(2\pi(t - 8/24))$$

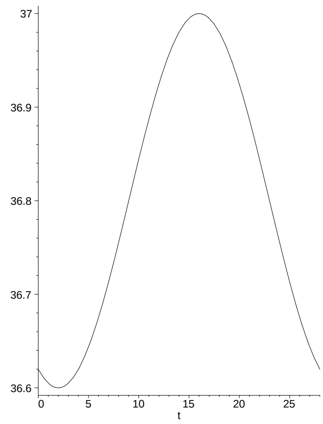
Der sinus ist bei $(2k+1)\pi/2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ maximal, also berechnen wir

$$2\pi(t - 8/24) = \pi/2 \iff t = 1/4 + 8/24 = 6/24 + 8/24 = 14/24$$

Die maximale Temperatur ist also $f_1(14/24) = 36.8 + 0.3 = 37.1$ und wird nach 14 Stunden des Tages, also um 14 h erreicht.



$f_1(t) = 36.8 + 0.3\sin(2\pi(t - 8/24))$



$f_2(t) = 36.8 + 0.2\sin(2\pi(t - 9)/28)$

Analog behandeln wir dem monatlichen Temperaturzyklus:

$$f_2(t) = 36.8 + R\sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0) = 36.8 + 0.2\sin(\frac{2\pi}{28} \cdot t - 2\pi \cdot 9/28) = 36.8 + 0.2\sin(2\pi(t - 9)/28)$$

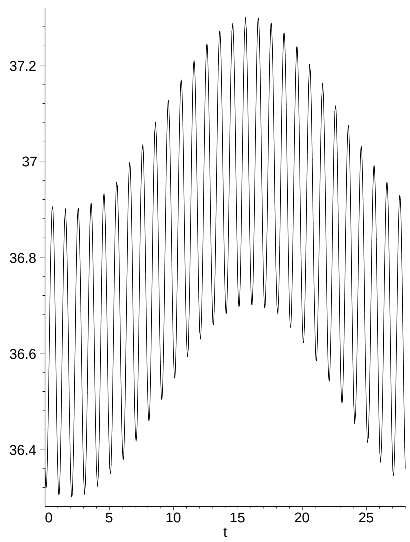
Wir erkennen, daß der sinus bei $t = 16$ maximal wird. Die maximale Temperatur ist also $f_2(16) = 36.8 + 0.2 = 37$ und wird nach 16 Tagen des Monats erreicht.

Setzen wir die beiden Funktionen zusammen zu einem Temperaturzyklus, der sowohl die monatlichen als auch die täglichen Schwankungen erhält, dürfen wir sie nicht einfach addieren (sonst würde die Durchsschnittstemperatur $2 \cdot 36.8^o$ betragen), sondern die folgende Funktion definieren:

$$f(t) = 36.8 + 0.3\sin(2\pi(t - 8/24)) + 0.2\sin(2\pi(t - 9)/28)$$

Die maximal Temperatur beträgt $36.8 + 0.3 + 0.2 = 37.3$ und wird um 14h am 16. Tag erreicht.

Die zusammengesetzte Kurve hat folgende stark oszillierende Gestalt:



Aufgabe 5 (Wiederholung):

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit Diffusion beschäftigen. Eine Substanz verlässt eine Zelle mit einer Rate, die proportional ist zu der Konzentration innerhalb der Zelle und dringt in die Zelle ein mit einer Rate die proportional zur Konzenration ausserhalb ist. Dabei hängen die Konstanten von der Substanz sowie den Eigenschaften der trennenden Membran ab. Sei $C(t)$ die Konzentration in der Zelle, Γ die Konzentration außerhalb und β der Proportionalitätsfaktor. Dann lautet das Modell

$$\frac{d}{dt}C(t) = \beta(\Gamma - C(t))$$

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung unter der Annahme, daß zu Beginn des Diffusionsvorgangs eine Konzentration C_0 in der Zelle ist.

(b) Wieso wurde die Konzentration Γ unabhängig von t gewählt ? Ist dies realistisch ?

(c) Welches Verhalten stellt sich langfristig ein ?

Lösung:

(a) Wir benutzen mal wieder die vierte Aufgabe der 2. Übung, diesmal mit $\beta = -\beta$ und $\gamma = \beta\Gamma$, und erhalten

$$C(t) = (C_0 - \Gamma)\exp(-\beta t) + \Gamma,$$

als Lösung, die die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung erfüllt.

(b) Unter der Annahme, daß der Zu- bzw. Abfluss aus der Zelle im Verhältnis zur Menge der Substanz außerhalb gering ist, ist es vernünftig, Γ als unabhängig von t zu wählen. Im Vergleich zu der schnellen änderung der Konzentration innerhalb der Zelle bleibt Γ relativ unverändert.

(c) Für $t \to \infty$ konvergiert die Lösung gegen den Wert Γ, es stellt sich also ein Gleichgewicht zwischen der Konzentration außerhalb der Zelle und der in der Zelle ein.