Universität Köln
Angewandte Mathematik
Johannes Müller
Michael Kurth

Mathematik für Biologen I, WS 01/02
`http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kuepper/biologie.html`

Mathematisches Institut
Raum 116/117
Tel: 0221/4702891

Lösungshinweise zu Übungsblatt Nr. 8

Aufgabe 1 (8 Punkte):

Die physikalische Leistung L ist definiert als die momentane Abgabe von Energie pro Zeiteinheit. Sei $E(t)$ die gesamte bis zur Zeit t abgegebene Energie, dann ist also

$$L(t) = \dot{E}(t)$$

Nehmen wir nun an, daß die Leistung eines Marathonläufers gemäß der Formel

$$L(t) = L_0 \frac{1}{1+\lambda t}$$

abnimmt. Wie groß ist dann die gesamte Energie, die er zum Zeitpunkt $t = 1$ abgegeben hat ?

Tip: Eine Stammfunktion von $1/(1+x)$ ist $\ln(1+x)$.

Lösung:

Gesucht ist also $E(1)$. Nach Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\int_0^1 L(t)dt = \int_0^1 \dot{E}(t)dt = E(1) - E(0).$$

Dabei haben wir die Integralgrenzen so gewählt, daß der gesuchte Wert $E(1)$ auftaucht. Die andere Grenze wurde als 0 gewählt, da dieser Wert bekannt ist. Die bis zum Zeitpunkt $t = 0$ abgegebene Energie ist natürlich Null. Daher folgt

$$E(1) = \int_0^1 L(t)dt.$$

Wir müssen also das Integral über L bestimmen. Sei $f(x) := 1/1+x$, dann ist nach Tip $F(x) = \ln(1+x)$ eine Stammfunktion. Andererseits gilt nach der Regel aus der Vorlesung (mit $c = \lambda$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $x = t$):

$$\int_0^1 L(t)dt = L_0 \int_0^1 \frac{1}{1+\lambda t}dt = L_0 \int_0^1 f(\lambda t)dt = \frac{L_0}{\lambda} \int_0^\lambda f(t)dt = \frac{L_0}{\lambda}(F(\lambda) - F(0)) = \frac{L_0}{\lambda}\ln(1+\lambda),$$

also $E(1) = L_0 \ln(1+\lambda)/\lambda$.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Die meisten Populationen haben Todes- und Geburtsraten, die von der Jahreszeiten abhängen. Sei $\mu(t)$ die zeitabhängige Todesrate und $\beta(t)$ die zeitabhängige Geburtsrate. Da die beiden Raten periodisch sein sollen, gilt

$$\mu(t+1) = \mu(t), \quad \beta(t+1) = \beta(t).$$

Die Dynamik der Populationsgröße $x(t)$ wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\mu(t)x(t) + \beta(t)x(t)$$

beschrieben.

(a) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t (-\mu(s) + \beta(s))ds\right)$$

die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ erfüllt.

(b) Bestimmen Sie eine Konstante A, so daß

$$x(n) = x_0 \exp(An)$$

für alle natürlichen Zahlen n gilt. Wie kann man A interpretieren ?

(c) In einem vereinfachten Modell wird nun die Geburtsrate als konstant über das Jahr angenommen, während bei der Todesrate zwischen Sommer- und Wintersterblichkeit unterschieden wird, also

$$\beta(t) = \beta, \qquad \mu(t) = \begin{cases} \mu_1, & 0 \le t \le 1/4,\ 3/4 \le t \le 1 \\ \mu_2, & 1/4 < t < 3/4. \end{cases}$$

Seien $\beta = 2$ und $\mu_1 = 3$ gegeben. Wie muss μ_2 gewählt werden, so daß die Population nicht ausstirbt ? Skizzieren Sie $x(t)$ in den ersten 5 Jahren ($0 \le t \le 5$) für $\beta = 2$, $\mu_1 = 3$ und (i) $\mu_2 = 1/2$, (ii) $\mu_2 = 1$ bzw. (iii) $\mu_2 = 2$.

Lösung:

(a) Zunächst verifizieren wir die Anfangsbedingung. Mit der Definition $I(t) = \int_0^t (-\mu(s) + \beta(s))ds$ müssen wir also $x(0) = x_0 \exp(I(0))$ bestimmen. Es gilt $I(0) = 0$, denn die Fläche unter der Funktion $-\mu(s) + \beta(s)$ zwischen 0 und 0 ist natürlich 0. Demach folgt $x(0) = x_0 \exp(0) = x_0$. Nun prüfen wir, ob die Differentialgleichung erfüllt ist. Dabei muss $x(t)$ nach der Kettenregel differenziert werden:

$$\frac{d}{dt}x(t) = x_0 \exp(I(t)) \frac{d}{dt} I(t).$$

Nach Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\frac{d}{dt} I(t) = -\mu(t) + \beta(t)$$

und damit die Behauptung.

(b) Wir berechnen $x(n)$ als

$$x(n) = x_0 \exp(\int_0^n (-\mu(s) + \beta(s))ds)$$

Wegen der Periodizität der Funktionen gilt

$$\int_k^{k+1} (-\mu(s) + \beta(s))ds = \int_0^1 (-\mu(s) + \beta(s))ds$$

und daher

$$\begin{aligned} \int_0^n (-\mu(s) + \beta(s))ds &= \int_0^1 (-\mu(s) + \beta(s))ds + \int_1^2 (-\mu(s) + \beta(s))ds + \ldots + \int_{n-1}^n (-\mu(s) + \beta(s))ds \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} (-\mu(s) + \beta(s))ds = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (-\mu(s) + \beta(s))ds = n \cdot \int_0^1 (-\mu(s) + \beta(s))ds. \end{aligned}$$

Dies bedeutet also $I(n) = nI(1)$ oder

$$x(n) = x_0 \exp(I(n)) = x_0 \exp(nI(1))$$

und damit hat die gesuchte Konstante A den Wert $I(1)$, d.h.

$$A = \int_0^1 (-\mu(s) + \beta(s))ds.$$

A ist also der Mittelwert von $-\mu(s) + \beta(s)$ über die Periode und gibt an, ob die Population - bis auf die unterjährigen Schwankungen - wächst oder abnimmt. Insofern ist A mit der bekannten Zerfalls- bzw. Zuwachskonstante aus der Wachstumsgleichung $\dot{x} = \lambda x$ artverwandt. Man bemerke, daß die hier untersuchte Populationsgleichung sich als $\dot{x} = \lambda(t)x$ schreiben lässt, wobei $\lambda(t) = -\mu(t) + \beta(t)$.

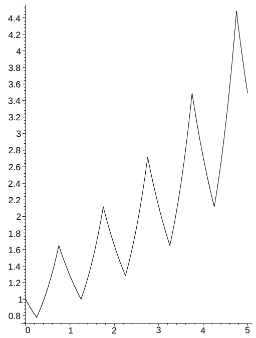
(c) Damit die Population nicht ausstirbt, muss gelten

$$\lim_{t\to\infty} x(t) > 0.$$

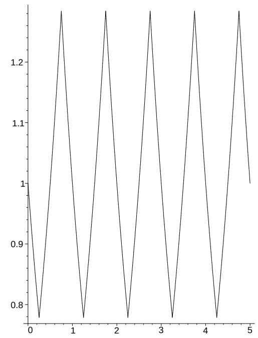
Insbesondere also $\lim_{n\to\infty} x(n) > 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn die in (b) errechnete Konstante nicht negativ ist. Die gesuchte Bedingung lautet also $A = I(1) = \int_0^1 (-\mu(s) + \beta(s))ds \geq 0$ Im konkreten Fall gilt

$$\begin{aligned} I(1) &= \int_0^{1/4} (-\mu_1 + \beta)ds + \int_{1/4}^{3/4} (-\mu_2 + \beta)ds + \int_{3/4}^{1} (-\mu_1 + \beta)ds \\ &= \frac{1}{4}(-\mu_1 + \beta) + (\frac{3}{4} - \frac{1}{4})(-\mu_2 + \beta) + (1 - \frac{3}{4})(-\mu_1 + \beta) \\ &= \frac{1}{4}(-3 + 2) + \frac{1}{2}(-\mu_2 + 2) + \frac{1}{4}(-3 + 2) = -\frac{\mu_2}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

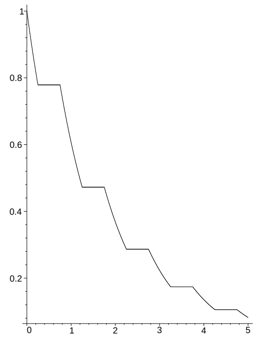
Dies ist genau dann nicht negativ, wenn $\mu_2 \leq 1$ ist. Die folgenden Skizzen gelten jeweils für $x_0 = 1$:



(i) $\mu_2 = 1/2$



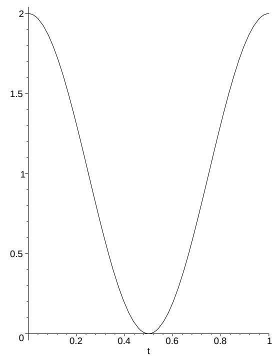
(ii) $\mu_2 = 1$



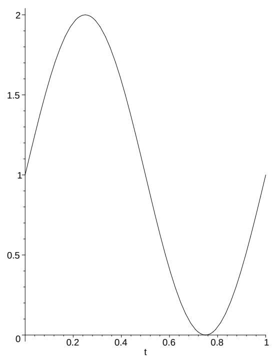
(iii) $\mu_2 = 2$

Wir erkennen, daß die mittlere Jahrespopulation in (i) exponentiell wächst, in (ii) konstant bleibt und in (iii) exponentiell abnimmt. Insbesondere ist in (ii) $I(1) = 0$ und daher ist die Lösung periodisch.

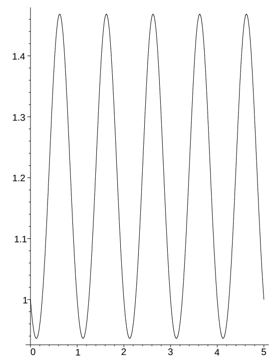
Zusatz: Natürlich ist die Annahme, daß die Funktionen stückweise konstant sind stark vereinfachend. Folgendes Modell ist realistischer: $\mu(t) = 1 + \cos(2\pi t)$, $\beta(t) := 1 + \sin(2\pi t)$. Siehe dazu folgende Skizzen



$\mu_(t)$



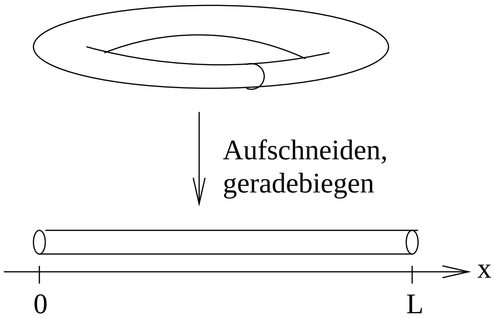
$\beta(t)$



$x(t)$

Aufgabe 3 (vorrechnen):

Wir betrachten einen ringförmigen Glastubus der Länge L (siehe Zeichnung).



Man kann den Durchmesser dieses Tubus vernachlässigen, d.h. der Ort ist hinreichend genau mit $x \in [0, L]$ angegeben. Der Tubus ist mit Wasser und Alkohol gefüllt. Sei $u(x,t)$ die Dichte des Alkohols zu Zeit t, d.h. die Menge von Alkohol zur Zeit t zwischen den Orten x_1 und x_2 ist gegeben durch das Integral $\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,dx$. Da unser Tubus ringförmig ist, gilt $u(x,t) = u(x+L,t)$, d.h. im Ort ist die Dichte L-periodisch.

Die zeitliche Entwicklung dieser Dichte wird durch die Diffusionsgleichung beschrieben,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = d \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

(erste Ableitung nach t gleich d mal zweiter Ableitung nach x). Dabei ist d eine positive Konstante, die die Geschwindigkeit der Diffusion des Stoffes beschreibt.

(a) Zeigen Sie durch Einsetzen, daß

$$u_n^{(1)}(x,t) = \exp\left(-d(\frac{n\pi}{L})^2 t\right) \sin(\frac{n\pi}{L}x) \qquad \text{bzw.} \qquad u_n^{(2)}(x,t) = \exp\left(-d(\frac{n\pi}{L})^2 t\right) \cos(\frac{n\pi}{L}x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ Lösungen der Diffusionsgleichung sind.

(b) Man kann zeigen, daß dann auch

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n^{(1)}(x,t) + b_n u_n^{(2)}(x,t)$$

mit beliebigen reellen Konstanten a_n, b_n eine Lösung ist. Wie lautet die Lösung obiger Diffusionsgleichung mit Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 2 - \sin(\frac{2\pi}{L}x) - \cos(\frac{7\pi}{L}x)?$$

(c) Wie sieht $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ aus ? Warum ?

Lösung:

(a) Wir berechnen zunächst die Ableitung nach t von $u_n^{(1)}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_n^{(1)}(x,t) = -d(\frac{n\pi}{L})^2 \exp\left(-d(\frac{n\pi}{L})^2 t\right) \sin(\frac{n\pi}{L}x) = -d(\frac{n\pi}{L})^2 u_n^{(1)}(x,t)$$

Weiter gilt für die Ableitung nach x

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u_n^{(1)}(x,t) &= \frac{n\pi}{L} \exp\left(-d(\frac{n\pi}{L})^2 t\right) \cos(\frac{n\pi}{L}x) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_n^{(1)}(x,t) &= -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \exp\left(-d(\frac{n\pi}{L})^2 t\right) \sin(\frac{n\pi}{L}x) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 u_n^{(1)}(x,t) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Gleichung erkennen wir, daß $u_n^{(1)}$ Lösung der Diffusionsgleichung ist. Mit $u_n^{(2)}$ verfahren wir analog.

(b) Aus der Aufgabe ist bekannt, daß

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n^{(1)}(x,t) + b_n u_n^{(2)}(x,t)$$

Lösung ist. Wir versuchen, dies an die Anfangsbedingungen anzupassen:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n^{(1)}(x,0) + b_n u_n^{(2)}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) = 2 - \sin(\frac{2\pi}{L}x) - \cos(\frac{7\pi}{L}x).$$

Offenbar müssen wir also $b_0 = 2$, $a_2 = -1$ und $b_7 = -1$ wählen und die restlichen Koeffizenten gleich Null setzen. Die zugehörige Lösung lautet dann

$$u(x,t) = 2 - \exp\left(-d(\frac{2\pi}{L})^2 t\right) \sin(\frac{2\pi}{L}x) - \exp\left(-d(\frac{7\pi}{L})^2 t\right) \cos(\frac{7\pi}{L}x).$$

(c) Lassen wir nun, in der Formel für $u(x,t)$, t gegen ∞ laufen, so folgt (da $d>0$)

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 2$$

Im Verlauf der Zeit nähert sich also die Dichte des Alkohols überall dem Wert 2 an (der Grenzwert ist unabhängig von x). Der Alkohol hat sich also gleichmäßig in dem Tubus verteilt.

Aufgabe 4 (vorrechnen):

Eine Droge wird zur Zeit $t=0$ in einen Muskel injiziert. Der Muskel gibt die Droge mit der konstanten Rate m in das Blut ab; im Blut wird die Droge mit der konstanten Rate $b \neq m$ abgebaut. Die zur Zeit t im Blut enthaltene Drogenmenge ist dann gegeben durch

$$u(t) = \frac{c\cdot m}{b-m}\left(\exp(-mt) - \exp(-bt)\right).$$

Die Abbaugeschwindigkeit v_B im Blut ist proportional zur vorhandenen Menge u, also $v_B(t) = bu(t)$.

(a) Sei $U(T)$ die gesamte im Zeitintervall $[0,T]$ vom Blut abgebaute Drogenmenge. Begründen Sie, daß $U(T)$ durch $\int_0^T v_B(t)dt$ gegeben ist und berechnen Sie dieses Integral.

(b) Welches Verhalten stellt sich für $T\to\infty$ ein. Was bedeutet das ?

(c) Der Muskel hat die Abgabegeschwindigkeit $v_M(t) = c\cdot m\cdot\exp(-mt)$. Wie groß ist die gesamte vom Muskel abgegebene Drogenmenge ?

Lösung:

(a) Die Abbaugeschwindigkeit ist definiert als v_B, d.h. für die momentane Änderung der abgebauten Drogenmenge gilt $\dot{U} = v_B$, also nach Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $U(T) = \int_0^T v_B(t)dt$. Dieses Integral berechnet sich wie folgt:

$$\int_0^T v_B(t)dt = \int_0^T b\frac{c\cdot m}{b-m}\left(\exp(-mt)-\exp(-bt)\right)dt = b\frac{c\cdot m}{b-m}\left(\int_0^T \exp(-mt)dt - \int_0^T exp(-bt)dt\right)$$

Wir wissen, daß $\exp(x)$ eine Stammfunktion von $\exp(x)$ ist und wenden die Formel aus der Vorlesung mit $c=-m$ bzw. $c=-b$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^T v_B(t)dt &= b\frac{c\cdot m}{b-m}\left(\frac{1}{-m}\int_0^{-mT}\exp(t)dt - \frac{1}{-b}\int_0^{-bT}\exp(t)dt\right)\\
&= b\frac{c\cdot m}{b-m}\left(\frac{1}{-m}(\exp(-mT)-\exp(0)) + \frac{1}{b}(\exp(-bT)-\exp(0)\right)\\
&= b\frac{c\cdot m}{b-m}\left(\frac{\exp(-bT)}{b} - \frac{\exp(-mT)}{m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{b}\right)\\
&= \frac{c}{b-m}\left(m\exp(-bT) - b\exp(-mT) + b - m\right).
\end{aligned}$$

(b) Wir schicken in der in (a) errechneten Formel $T\to\infty$ und erhalten

$$\lim_{T\to\infty} U(T) = \int_0^\infty v_B(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{c}{b-m}\left(m\exp(-bT) - b\exp(-mT) + b - m\right) = c\frac{b-m}{b-m} = c.$$

Damit ist c die gesamte vom Blut abgebaute Drogenmenge. Weiter ist $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$, das bedeutet das zum Zeitpunkt $t=\infty$ im Blut keine Drogen mehr vorhanden sind. Daher ist c also auch die maximale Drogenmenge, die im Blut enthalten war.

(c) Sei also $V(T)$ die gesamte im Zeitintervall $[0,T]$ vom Muskel abgegebene Drogenmenge. Wie in (a) berechnen wir

$$V(T) = \int_0^T v_M(t)dt = cm\int_0^T \exp(-mt)\ dt = \frac{cm}{-m}\left(\exp(-mT)-\exp(0)\right) = -c(\exp(-mT)-1).$$

Um die gesamte abgegeben Drogenmenge zu bestimmen, schicken wir wieder $T\to\infty$ und erhalten

$$\lim_{T\to\infty} V(T) = \int_0^\infty v_M(t)dt = \lim_{T\to\infty} -c(\exp(-mT)-1) = c.$$

Somit wird die gesamte vom Muskel abgegebene Drogenmenge im Blut abgebaut.

Aufgabe 5 (Wiederholung):

Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \cos(2x)$ um $x_0 = 0$.

Lösung:

Es sei zunächst an die Formel für die Taylorreihe erinnert:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dx^i} f(0) x^i.$$

Um eine GesetzmBigkeit zu erkennen, berechnen wir die ersten Ableitungen von f. Es ist $f(0) = \cos(0) = 1$ und

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin(2x) & \Rightarrow \quad & f'(0) = 0 \\ f''(x) &= -4\cos(2x) & \Rightarrow \quad & f''(0) = -4 \\ f'''(x) &= 8\sin(2x) & \Rightarrow \quad & f'''(0) = 0 \\ f''''(x) &= -16\cos(2x) = -16f(x) & \Rightarrow \quad & f''''(0) = -16 \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß die fünfte Ableitung von f gleich $-16f'(x)$ ist usw. Für die i-te Ableitung erkennen wir dann

$$\begin{aligned} &i \text{ gerade, also } i = 2k: \ \frac{d^n}{dx^n} f(x) = 2^{2k}(-1)^k \cos(2x) \Rightarrow \frac{d^n}{dx^n} f(x)(0) = (-1)^k 2^{2k} \\ &i \text{ gerade, also } i = 2k+1: \ \frac{d^n}{dx^n} f(x)(x) = 2^{2k+1}(-1)^{k+1} \sin(2x) \Rightarrow \frac{d^n}{dx^n} f(x)(0) = 0 \end{aligned}$$

Damit fallen in der Taylor-Reihe alle ungeraden Potenzen weg, wir summieren dann statt i über k und erhalten

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dx^i} f(0) x^i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \frac{d^{\,2k}}{dx^{2k}} f(0) x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2x)^{2k} = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \dots. \end{aligned}$$

Selbstverständlich hätte man auch die Taylorreihe für $\cos(y)$ ausrechnen können und dann $y = 2x$ einsetzen.