Universität Köln
Angewandte Mathematik
Johannes Müller
Michael Kurth

Mathematik für Biologen I, WS 01/02

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kuepper/biologie.html

Mathematisches Institut
Raum 116/117
Tel: 0221/4702891

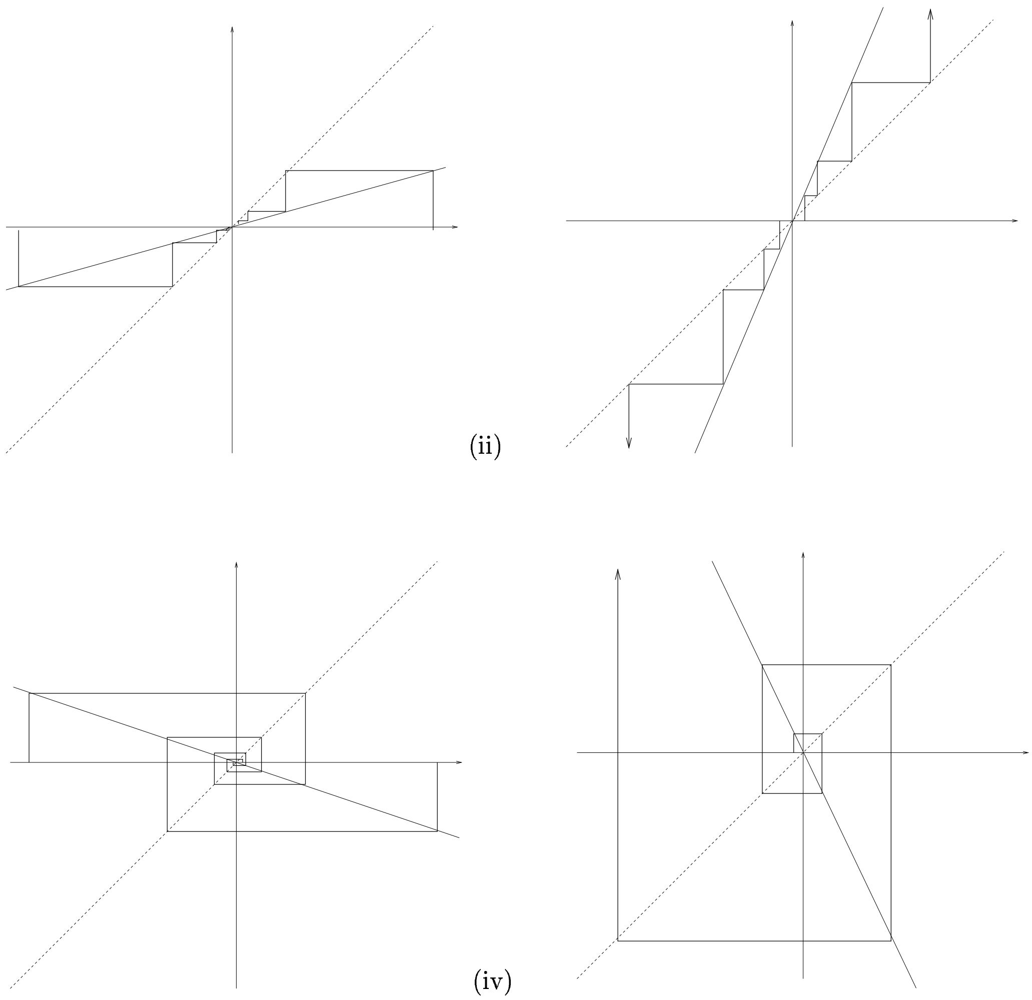
Lösungshinweise zu Übungsblatt Nr. 9

Aufgabe 1 (8 Punkte):

Führen Sie die graphische Iteration für das Modell $x_{n+1} = rx_n$ und (i) $r = 1/2$, (ii) $r = 3/2$, (iii) $r = -1/2$ und (iv) $r = -3/2$ durch. Welche Aussagen lassen sich über das langfristige Verhalten machen ?

Lösung:

In (i) konvergiert die Folge der x_n gegen Null; in (ii) wächst sie für $x_0 > 0$ gegen $+\infty$, für $x_0 < 0$ gegen $-\infty$.



(i) (ii) (iii) (iv)

Die Folge in (iii) nimmt abwechselnd positive und negative Werte an ("alternierend") und konvergiert gegen Null; in (iv) ist die Folge auch alternierend einen Grenzwert kann man jedoch nicht angeben (eine Teilfolge geht gegen $+\infty$, eine andere gegen $-\infty$).

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Eine Population verhalte sich gemäß dem Rickert-Modell

$$x_{n+1} = cx_n \exp(-kx_n).$$

(i) Skalieren Sie das Problem derart, daß es die Form $x_{n+1} = rx_n \exp(-x_n)$ hat.

(ii) Für welche r hat das Modell zwei nichtnegative, stationäre Punkte ?

(iii) Interpretieren Sie das Ergebnis aus (ii).

Lösung:

(i) Es sei $y_n := kx_n$, dann ist $x_{n+1} = cx_n \exp(-y_n)$ und durch Multiplikation mit k folgt: $y_{n+1} = cy_n \exp(-y_n)$. Schreiben wir nun für y_n wieder x_n und statt c nun r, so ist die gewünschte Form erreicht.

(ii) Selbstverständlich ist $\bar{x} = 0$ Fixpunkt des Systems. Ist nun $r > 0$ und $\bar{x} > 0$, so folgt aus $\bar{x} = r\bar{x}\exp(-\bar{x})$:

$$\exp(-\bar{x}) = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = -\ln(\frac{1}{r}).$$

Also ist $\bar{x}$ positiv, falls $r > 1$ ist.

(iii) Da wir ein Populationsmodell betrachten, ist klar, daß nur positive Werte für x_n interessant sind. r ist nun der Wachstumskoeffizient des Systems. Die Bedingung $r > 1$ bedeutet, daß ein Individuum sich mehr als einmal reproduzieren muss. Man beachte die Ähnlichkeit zu dem logistischen Modell.

Aufgabe 3 (vorrechnen):

Angenommen, ein Individum bekommt täglich ein Medikament zugeführt, so daß die Zufuhr einer Medikamentenkonzentration im Blut von d [mg/l] entspricht. Andererseits wird das Medikament durch Körperorgane ausgeschieden und zwar mit einer täglichen Abbaurate von p Prozent des Medikamentes.

(i) Geben Sie ein Entwicklungsgesetz für x_n an, wenn x_n die Medikamentenkonzentration n Tage nach Beginn der Medikamenteneingabe darstellt.

(ii) Gibt es einen Gleichgewichtspunkt ? Wenn ja, bestimmen Sie diesen.

(iii) Wie stark muss die tägliche Zufuhr des Medikamentes (also d) gewählt werden, wenn x_n gegen einen vorgegebenen optimalen Wert x_{opt} konvergieren soll ? Begründen Sie Ihre Antwort sowohl analytisch als auch mit Hilfe der graphischen Iteration.

Lösung:

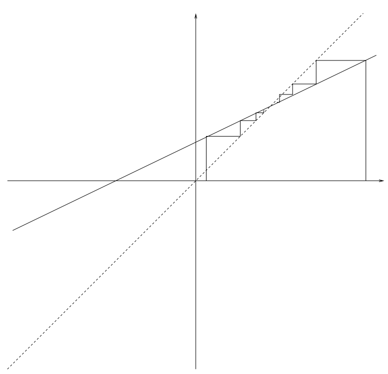
(i) Sei x_n also die Medikamentenkonzentration n Tage nach Beginn der Medikamenteneingabe. Wir gehen davon aus, daß vor Beginn der Behandlung keine Spuren des Medikaments im Blut zu finden ist, also $x_0 = 0$. Am Tag 1 wird die Konzentration d zugeführt, abgebaut wird noch nichts, also $x_1 = d$. Zwei Tage nach Beginn wird wieder d zugeführt und $p/100 \cdot x1$ abgebaut, usw. Es gilt also

$$x_{n+1} = x_n + d - \frac{p}{100}x_n = d + \left(1 - \frac{p}{100}\right) x_n.$$

(ii) Angenommen, $\bar{x}$ sei Gleichgewichtspunkt, dann gilt

$$\bar{x} = d + \left(1 - \frac{p}{100}\right)\bar{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{100}\bar{x} = d \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} = 100\frac{d}{p}$$

(iii) Mit Hilfe der graphischen Iteration kann man sich klar machen, daß die Folge gegen den Fixpunkt konvergieren muss (vgl. Skizze). Wichtig ist dabei, daß die Steigung $1 - p/100$ kleiner als 1 ist und d positiv ist. Man sieht, daß der Fixpunkt dann positiv ist und die Folge unabhäbgig vom Startwert gegen diesen konvergiert.



Analytisch gehen wir so wie in Aufgabe 3 des zweiten Übungsblattes vor und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} x_n = d\sum_{k=0}^{n}(1-\frac{p}{100})^k = \frac{d}{1-(1-p/100)} = 100\frac{d}{p} = \bar{x},$$

was wir uns ja anhand der graphischen Iteration schon klar gemacht haben. Die Tatsache, daß der Grenzwert der Folge auch Fixpinkt ist, ist übrigens kein Zufall ! Ist nun x_{opt} als Grenzwert vorgegeben, so folgt aus $x_{opt} = \bar{x} = 100d/p$, daß die tägliche Zufuhr des Medikamentes als $d = \frac{p}{100}x_{opt}$ gewählt werden sollte.

Aufgabe 4 (vorrechnen):

Betrachtet wird die Größe x_n einer Population in einem beschränkten Lebensraum zum Zeitpunkt n. Wird die Population zusätzlich zu den ohnehin auftretenden Sterbefällen noch bejagt, so lässt sich x_{n+1} aus x_n durch

$$x_{n+1} = q_n x_n - kx_n$$

berechnen. Dabei ist $q_n = c(L - x_n)$ die Reproduktionsrate, die proportional zur Größe des noch vorhandenen Lebensraumes ist und kx_n die Anzahl der durch Jagd getöten Lebewesen mit einer konstanten Jagdintensität k.

(i) Erstellen Sie ein logistisches Entwicklungsgesetz in der Form $x_{n+1} = ax_n - bx_n^2$, d.h. geben Sie die Kontsanten a und b in Abhängigkeit von c, L und k an.

(ii) Skalieren Sie das Problem derart, daß nur noch eine Konstante auftritt.

(iii) Der geschätzte Lebensraum für Blauwale beträgt 150000 Tiere, die Reproduktionsrate liegt bei $q = 1.08$. Die Proportionalitätskonstante wird daher als $c = q/L = 9/1250000$ angenommen.

  (a) Sei zunächst $k = 0$ (d.h. keine Jagd). Im Moment gibt es ca. 2000 Blauwale. Berechnen Sie die Blauwalpopulation der nächsten zwei Jahre. Gibt es ein Gleichgewicht ? Bestimmen Sie dieses gegebenenfalls.

  (b) Sei jetzt $k = 0.04$. Gibt es hier ein Gleichgewicht ? Wenn ja, bestimmen Sie dieses. Gegen welchen Wert konvergiert die Folge mit $x_0 = 2000$?

  (c) Wie groß darf k höchstens werden, damit die Blauwale nicht ausgerottet werden ?

Lösung:

(i) Es ist $x_{n+1} = c(L - x_n)x_n - kx_n = (cL - k)x_n - cx_n^2$, also definieren wir $a := (cL - k)$ und $b := c$.

(ii) Zur Skalierung schreiben wir $x_{n+1} = ax_n(1 - \frac{b}{a}x_n)$ und erkennen, daß es sich hierbei um das logistische Modell der Vorlesung handelt. Analoge Skalierung $y_{n+1} = \frac{b}{a}x_n$ liefert das bekannte logistische Modell $y_{n+1} = ay_n(1 - y_n)$.

(iii) (a) Für $k = 0$ ist $a = cL = q = 27/25$, $b = c$ und $b/a = 1/L$, also ist die Iterationsvorschrift $y_{n+1} = qy_n(1 - y_n)$. In den ersten zwei Jahren gilt nun:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{x_0}{L} = \frac{2000}{150000} = \frac{2}{150} = \frac{1}{75} \\ \Rightarrow\quad y_1 &= \frac{27}{25}y_0(1-y_0) = \frac{222}{15625} = 0.14208 \ \Rightarrow x_1 = Ly_1 = \frac{10656}{5} = 2131.2 \\ \Rightarrow\quad y_2 &= \frac{27}{25}y_1(1-y_1) = \frac{92325582}{6103515625} = 0.1512662335 \ \Rightarrow x_2 = Ly_2 = \frac{4431627936}{1953125} = 2268.993503 \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, daß $\bar{y} = 0$ und $\bar{y} = (a-1)/a$ die Gleichgewichtspunkte sind. Für die Ursprungsvariable bedeutet dies: $\bar{x} = 0$ und $\bar{x} = (a-1)/b = (q-1)/c = 2/25 \cdot 1250000/9 = 100000/9 = 11111.11111$. Man kann zeigen oder sich anhand der graphischen Iteration klarmachen, daß die Folge auch gegen diesen Wert konvergiert.

(b) Für $k = 0.04 = 4/100$ ist $a = (4 \cdot 27 - 4)/100 = 1.04$, $b = c$ und $b/a = c/(cL - k) = 9/1250000 \cdot 100/104 = 9/1300000$. Auch hier gibt es die Fixpunkte $\bar{y} = 0$ und $\bar{y} = (a-1)/a$, also $\bar{x} = 0$ und $\bar{x} = (a-1)/b = 4/100 \cdot 1250000/9 = 50000/9 = 5555.555556$. Auch hier konvergiert die Folge mit $x_0 = 2000$ gegen diesen Wert. Man erkennt, welchen Einfluß die Jagd auf die Blauwalpopulation hat.

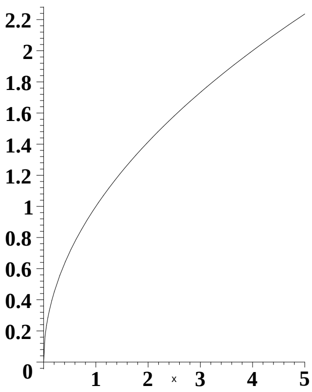
(c) Anhand der graphischen Iteration kann man sich klarmachen, daß die Population ausstirbt wenn die beiden Fixpunkte zusammenfallen, also $\bar{x} = (a-1)/b = 0$. In diesem Fall bedeutet das für k: $cL - k = 1$, also $k = cL - 1 = q - 1 = 0.08$.

Aufgabe 5 (Wiederholung):

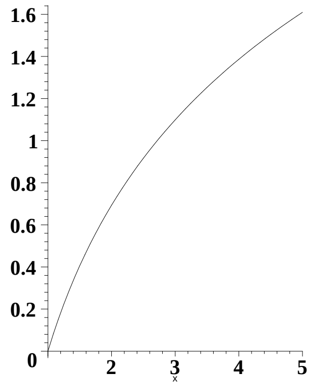
Ordnen Sie die folgenden Funktionen den zugehörigen Graphen zu.

$$f(x) = \exp(x), \quad f(x) = \ln(x), \quad f(x) = \cos(3x)$$
$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x) = \sin(3x), \quad f(x) = \exp(x^2)$$
$$f(x) = \sin(x), \quad f(x) = \sqrt{4x}, \quad f(x) = x^2$$

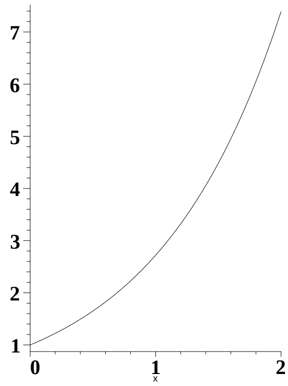
Lösung:



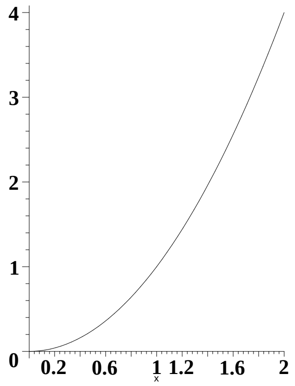
$f(x) = \sqrt{x}$



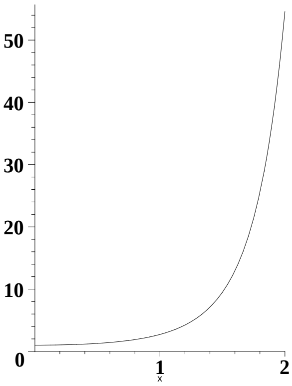
$f(x) = \ln(x)$



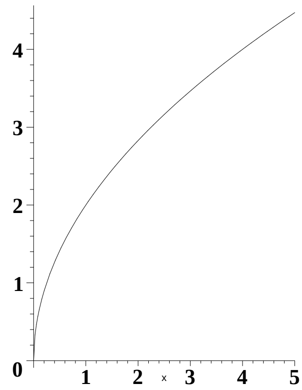
$f(x) = \exp(x)$



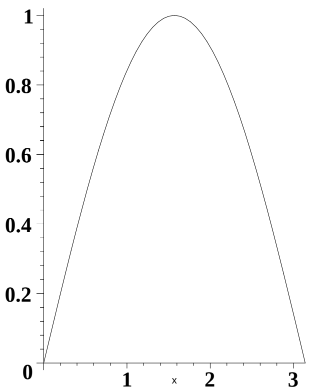
$f(x) = x^2$



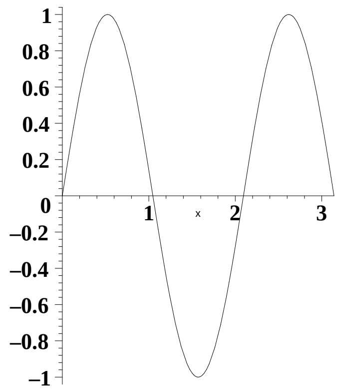
$f(x) = \exp(x^2)$



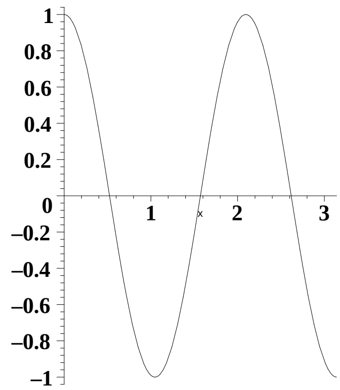
$f(x) = \sqrt{4x}$



$f(x) = \sin(x)$



$f(x) = \sin(3x)$



$f(x) = \cos(3x)$