

## Lösungshinweise zur Klausur vom 29.1.2002

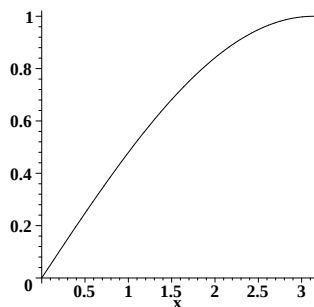
### Aufgabe 1:

Ordnen Sie die folgenden Funktionen den zugehörigen Graphen zu.

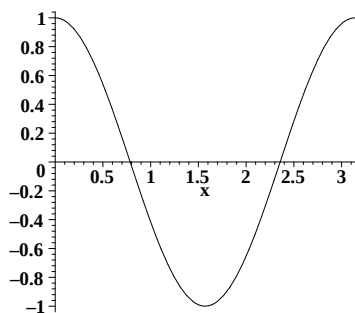
- (a)  $f(x) = \sin(x/2)$ , (b)  $f(x) = x^2$ , (c)  $f(x) = \exp(x)/(1 + \exp(x))$   
 (d)  $f(x) = x^4$ , (e)  $f(x) = 1/\ln(x)$ , (f)  $f(x) = \sin(2(x+1))$   
 (g)  $f(x) = 1/x$ , (h)  $f(x) = \exp(-x)$ , (i)  $f(x) = \cos(2x)$

Schreiben Sie dazu den entsprechenden Buchstaben unter die passende Abbildung.

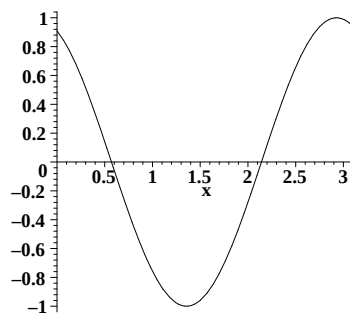
### Lösung:



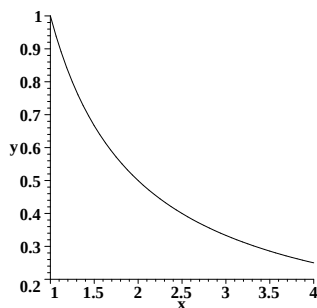
(a)  $f(x) = \sin(x/2)$



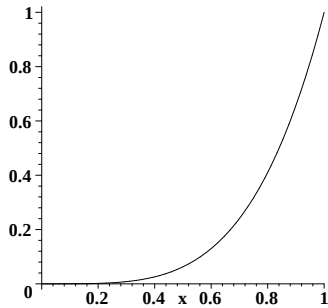
(i)  $f(x) = \cos(2x)$



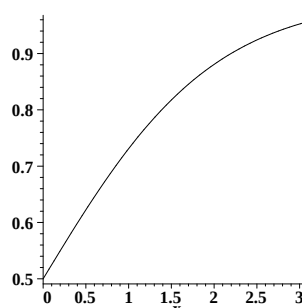
(f)  $f(x) = \sin(2(x+1))$



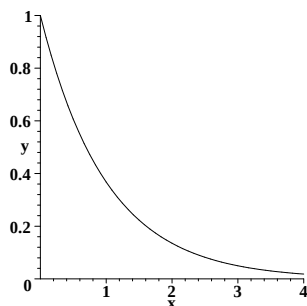
(g)  $f(x) = 1/x$



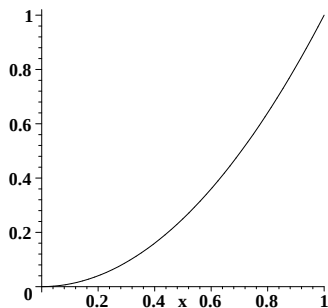
(d)  $f(x) = x^4$



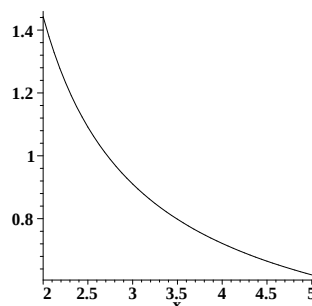
(c)  $f(x) = \exp(x)/(1 + \exp(x))$



(h)  $f(x) = \exp(-x)$



(b)  $f(x) = x^2$



(e)  $f(x) = 1/\ln(x)$

## Aufgabe 2:

- (i) Untersuchen Sie die Konvergenz der unten angegebenen Folgen und bestimmen Sie ggf. ihren Limes. Ein formaler Beweis ist nicht nötig.

$$x_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad x_n = \cos\left(\frac{1}{n+1}\right), \quad x_n = \exp(n^2).$$

- (ii) Beweisen Sie, daß die Folge

$$x_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + 5$$

nicht konvergiert.

### Lösung:

- (i) Die Folge  $x_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  ist eine Nullfolge, d.h. sie konvergiert gegen den Limes 0; denn die Teilfolgen  $1/\sqrt{n+1}$  und  $-1/\sqrt{n+1}$  konvergieren gegen Null. Aus dem gleichen Grund konvergiert die zweite Folge gegen den Wert  $\cos(0)$ , also gegen den Limes 1. Die letzte Folge konvergiert hingegen nicht, sie wächst über alle Schranken, d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n^2) = +\infty$ .
- (ii) Zum Beweis sei angenommen, daß die Folge konvergiert. Zunächst gilt für  $n \in \mathbb{N}$ :

$$x_{2n} = (-1)^{2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) + 5 = 6 + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} > 6$$
$$x_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)+1}}\right) + 5 = 4 - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} < 4$$

Würde nun  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  existieren, so müßte nach Definition für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existieren, so daß für alle  $n > N$  gilt:  $|x - x_n| \leq \epsilon$ . Aufgrund obiger Betrachtungen kann man daraus folgern:

$$a \geq 6 - \epsilon, \quad a \leq 4 + \epsilon.$$

Wählt man nun zum Beispiel  $\epsilon = 1/2$ , so folgt  $a \geq 6 - 1/2 = 11/2 = 5,5$  und  $a \leq 4 + 1/2 = 9/2 = 4,5$ , was nicht gleichzeitig sein kann. Es ergibt sich also ein Widerspruch zu unserer Annahme, demnach kann die Folge nicht konvergieren.

## Aufgabe 3:

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$x(t) = -\ln(\cos(t) + C)$$

für alle  $C \in \mathbb{R}$  Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sin(t) \exp(x(t))$$

ist. Bestimmen Sie die Konstante  $C$  so, daß die Anfangsbedingung  $x(0) = 0$  erfüllt ist.

### Lösung:

Wir berechnen zunächst die Ableitung von  $x(t)$ :

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{\cos(t) + C} \cdot (-\sin(t)) = \frac{\sin(t)}{\cos(t) + C}$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung berechnet sich zu

$$\sin(t) \exp(x(t)) = \sin(t) \exp(-\ln(\cos(t) + C)) = \frac{\sin(t)}{\exp(\ln(\cos(t) + C))} = \frac{\sin(t)}{\cos(t) + C} = \frac{d}{dt}x(t),$$

was zu beweisen war. Wir passen die Lösung noch an die Anfangsbedingung an:

$$x(0) = 0 \Leftrightarrow -\ln(\cos(0) + C) = 0 \Leftrightarrow 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0.$$

Die Lösung der Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung  $x(0) = 0$  lautet also:

$$x(t) = -\ln(\cos(t)).$$

#### Aufgabe 4:

Bei der  $C^{14}$ -Methode zur Altersbestimmung nutzt man aus, daß in lebenden Organismen das Verhältnis von  $C^{14}$  und  $C^{12}$  einen festen Wert  $c_0$  hat. In toten Organismen zerfällt das Isotop  $C^{12}$  praktisch nicht, während das Isotop  $C^{14}$  mit einer Halbwertszeit von 5760 Jahren zerfällt (d.h. nach 5760 Jahren ist nur noch die Hälfte des Isotops vorhanden). Im Jahre 1947 wurden in Qumran, in der Nähe des Toten Meeres, von einem Hirtenjungen die berühmten Schriftrollen gefunden. Bei ihnen war das Verhältnis von  $C^{14}$  zu  $C^{12}$  auf 79,12% von  $c_0$  gesunken. Bestimmen Sie das Alter der Schriftrollen.

#### Lösung:

Wir legen wie in Aufgabe 3 der vierten Übung exponentiellen Zerfall zu Grunde. Die Zerfallskonstante  $\sigma$  haben wir dort schon berechnet:

$$\begin{aligned}\exp(-5760\sigma) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -5760\sigma &= \ln(1/2) = -\ln(2) \\ \Leftrightarrow \sigma &= \frac{\ln(2)}{5760}.\end{aligned}$$

Sei  $t_0$  das Alter der Schriftrollen im Jahre 1947 und  $p := 0.7912$ . Wir wenden das Zerfallsgesetz an und erhalten

$$\begin{aligned}c_0 \exp(-\sigma t_0) &= pc_0 = pc_0 \\ \Leftrightarrow \exp(-\sigma t_0) &= p \\ \Leftrightarrow -\sigma t_0 &= \ln(p) \\ \Leftrightarrow t_0 &= -\frac{\ln(p)}{\sigma} \\ \Leftrightarrow t_0 &= -5760 \frac{\ln(p)}{\ln(2)}.\end{aligned}$$

Wir errechnen daraus:  $t_0 = 1946,2215$ . Die Schriftrollen von Qumran wurden also im Jahre  $1947 - 1946,2215 = 0.7785$ , d.h. tatsächlich zur Zeit um Christi Geburt, erstellt. Demnach sind sie heute 2002 Jahre alt. Das  $C^{14}$ -Verfahren wurde übrigens wirklich benutzt, um das Alter der Qumran-Schriftrollen zu bestimmen.

#### Aufgabe 5:

In einem Experiment haben Sie die Größe einer Bakterienkultur zu verschiedenen Zeitpunkten bestimmt:

|                             |   |    |    |
|-----------------------------|---|----|----|
| Zeit $t$                    | 1 | 5  | 10 |
| Anzahl der Bakterien $y(t)$ | 7 | 11 | 19 |

Sie nehmen an, daß ein funktionaler Zusammenhang der Form

$$y(t) = a \exp(bt)$$

die obigen Daten beschreibt. Finden Sie zunächst eine Transformation, durch die man einen linearen Zusammenhang der Form

$$Y = AX + B$$

erhält. Führen Sie dann eine lineare Regression durch und bestimmen Sie damit die Konstanten  $a$  und  $b$ . Ergänzen Sie dazu folgende Tabelle und runden Sie dabei alle Einträge auf 2 Nachkommastellen.

|           |  |  |  |          |            |
|-----------|--|--|--|----------|------------|
|           |  |  |  | $\Sigma$ | $\Sigma/n$ |
| $X_i$     |  |  |  |          |            |
| $Y_i$     |  |  |  |          |            |
| $X_i^2$   |  |  |  |          |            |
| $X_i Y_i$ |  |  |  |          |            |

#### Lösung:

Wir erkennen, daß wir hier eine semilogarithmische Transformation durchführen müssen:

$$y = a \exp(bt) \Leftrightarrow \ln(y) = \ln(a \exp(bt)) = \ln(a) + \ln(\exp(bt)) = \ln(a) + bt$$

Sei also  $X = t$ ,  $Y = \ln(y)$ . Dann ist  $Y = AX + B$  mit  $A = b$  und  $B = \ln(a)$ . Wir führen eine lineare Regression durch und füllen dazu die Tabelle aus.

|           |      |       |        | $\Sigma$ | $\Sigma/n$ |
|-----------|------|-------|--------|----------|------------|
| $X_i$     | 0,00 | 5,00  | 10,00  | 15,00    | 5,00       |
| $Y_i$     | 1,95 | 2,40  | 2,94   | 7,29     | 2,43       |
| $X_i^2$   | 0,00 | 25,00 | 100,00 | 125,00   | 41,67      |
| $X_i Y_i$ | 0,00 | 12,00 | 29,4   | 41,4     | 13,8       |

Nun berechnen sich  $A$  und  $B$  zu

$$A = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \right)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2} = 0,09898 \sim 0,10$$

$$B = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \right) - a \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = 1,93$$

Für die Ursprungsvariablen gilt daher

$$a = \exp(B) = 6,8895 \sim 6,89 \text{ und } b = A = 0,1.$$

Wir haben also den Zusammenhang

$$y(t) = 6,89 \exp(0,1t)$$

hergeleitet.

### Aufgabe 6:

Gegeben seien Daten  $x_i, y_i$ , von denen Sie vermuten, daß sie einem funktionalen Zusammenhang der Form

$$\left( \frac{x}{a} \right)^2 + \left( \frac{y}{b} \right)^2 = 1$$

genügen. (Dies ist eine Ellipse!). Finden Sie eine Transformation

$$X = g(x), \quad Y = f(y),$$

so daß  $X$  und  $Y$  einen linearen Zusammenhang der Form

$$Y = AX + B$$

erfüllen.

### Lösung:

Es gilt

$$\left( \frac{x}{a} \right)^2 + \left( \frac{y}{b} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2 \left( 1 - \frac{1}{a^2} x^2 \right) = -\frac{b^2}{a^2} x^2 + b^2.$$

Setzen wir nun  $X = x^2$ ,  $Y = y^2$ ,  $A = -b^2/a^2$  und  $B = b^2$ , so haben wir den gesuchten linearen Zusammenhang gefunden.

### Aufgabe 7:

Auf einer archäologischen Grabungsstätte wird an sechs verschiedenen Tagen nach römischen Münzen gesucht. Dabei werden insgesamt 6 verschiedene Sorten  $S_1, \dots, S_6$  gefunden, die Ergebnisse der Ausgrabungen sind dabei in folgender Tabelle aufgeführt:

|       | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ | $S_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Tag 1 | x     |       | x     |       | x     |       |
| Tag 2 |       |       | x     | x     | x     |       |
| Tag 3 |       |       |       |       | x     | x     |
| Tag 4 | x     |       | x     |       |       |       |
| Tag 5 |       | x     |       |       |       |       |
| Tag 6 | x     |       | x     |       | x     |       |

Schätzen Sie mittels Jackknife die Anzahl der verschiedenen Münzsorten, die auf dem Ausgrabungsfeld vorkommen.

**Lösung:**

Wir berechnen also wie die Jackknife-Schätzer bei weggelassener Grabung am  $i$ -ten Tag für  $i = 1, \dots, 6$ . Insgesamt haben wir 6 verschiedene Münzarten entdeckt. Lassen wir die erste Grabung weg, so erkennen wir, daß all diese Arten auch an einem der anderen fünf Tage auftauchen. Es ist also

$$Z_6^{(1)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6$$

Analog lassen sich die anderen Werte berechnen:

$$Z_6^{(2)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 11$$

$$Z_6^{(3)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = 11$$

$$Z_6^{(4)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = 6$$

$$Z_6^{(5)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 11$$

$$Z_6^{(6)} = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = 6$$

Der gesuchte Jackknife-Schätzer ist nun der Mittelwert aus diesen Werten:

$$\hat{Z}_6 = \frac{1}{6}(6 + 11 + 11 + 6 + 11 + 6) = \frac{51}{6} = 8.5.$$

Wir runden den Wert auf 9 auf und schätzen, daß es 9 verschiedene Arten römischer Münzen gibt.

**Aufgabe 8:**

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = 3 \cos(\pi t) - \sqrt{3} \sin(\pi t).$$

Berechnen Sie Amplitude  $R$ , Frequenz  $\omega$  und Phase  $\varphi_0$  von  $f$  und skizzieren Sie die Funktion ohne Verwendung einer Wertetafel.

**Lösung:**

Gesucht ist also eine Darstellung der Form

$$f(t) = R \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Wir wenden das bekannte Verfahren an und schreiben

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}} \sin(\pi t) + \frac{3}{\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}} \cos(\pi t) \right) = \sqrt{12} \left( -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} \sin(\pi t) + \frac{3}{\sqrt{12}} \cos(\pi t) \right) \\ &= \sqrt{12} \left( -\frac{1}{2} \sin(\pi t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\pi t) \right). \end{aligned}$$

Wegen  $(-1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 = 1$  existiert nun ein Winkel  $\varphi_0$  mit

$$\cos(\varphi_0) = -\frac{1}{2}, \quad \sin(\varphi_0) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

also  $\varphi_0 = 2\pi/3$ . Damit haben wir also folgende Darstellung für  $f$  gefunden:

$$f(t) = \sqrt{12} \sin(\pi t + \frac{2\pi}{3}).$$

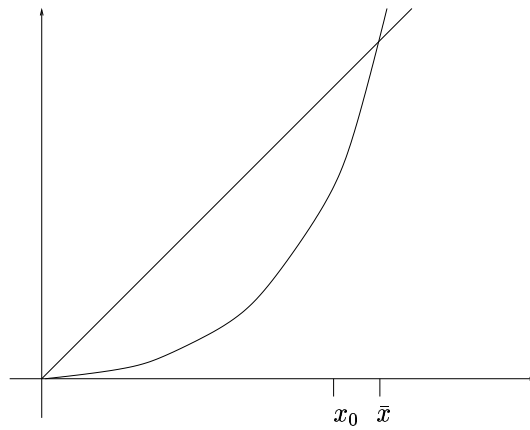
Demnach ist die Amplitude  $R = \sqrt{12}$ , die Frequenz  $\omega = \pi$  und die Phase  $\varphi_0 = 2\pi/3$ .

**Aufgabe 9:**

Betrachten Sie das Populationsmodell

$$x_{n+1} = r \frac{x_n^3}{1 + x_n^2}$$

und bestimmen Sie die nichtnegativen Gleichgewichtspunkte des Systems sowie deren Stabilität. Führen Sie weiter in der folgenden Skizze die graphische Iteration zum Startwert  $x_0 < \bar{x}$  durch:



**Lösung:**

Sei  $\bar{x}$  ein Gleichgewichtspunkt, also

$$\bar{x} = r \frac{\bar{x}^3}{1 + \bar{x}^2}$$

Dann ist entweder  $\bar{x} = 0$  oder  $1 + \bar{x}^2 = r\bar{x}^2$ , also (da wir nur an nichtnegativen Gleichgewichtspunkten interessiert sind)

$$\bar{x} = \bar{x}_1 = 0 \text{ bzw. } \bar{x} = \bar{x}_2 = \sqrt{\frac{1}{r-1}} \text{ falls } r > 1.$$

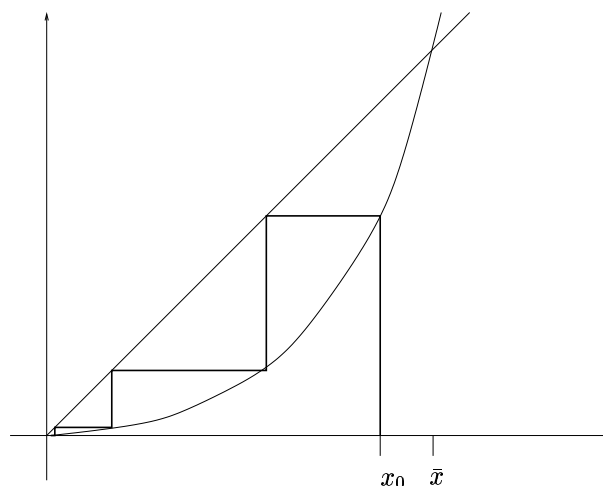
Zur Stabilitätsuntersuchung müssen wir die rechte Seite ableiten und an den Gleichgewichtspunkten auswerten. Sei dazu  $f(x) = rx/(1+x^2)$ . Es gilt:

$$f'(x) = r \frac{(1+x^2) \cdot 3x^2 - 2x \cdot x^3}{(1+x^2)^2} = r \frac{3x^2 + x^4}{(1+x^2)^2}.$$

Der triviale Fixpunkt ist immer (für alle  $r$ ) stabil, denn  $f'(0) = 0$ . Wir vermuten daher, daß der nichttriviale Fixpunkt instabil ist. Dies ist auch tatsächlich der Fall:

$$\begin{aligned} f'(\bar{x}_2) &= r \frac{3/(r-1) + 1/(r-1)^2}{(1 + 1/(r-1))^2} = r \frac{(3(r-1) + 1)/(r-1)^2}{r^2/(r-1)^2} \\ &= \frac{3r-2}{r} = 3 - \frac{2}{r} > 1 \text{ da } r > 1. \end{aligned}$$

Auch die graphische Iteration zeigt, daß der triviale Fixpunkt stabil ist:



**Aufgabe 10:**

In dieser Aufgabe betrachten wir die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t) + b \text{ mit } a \neq 0.$$

Berechnen Sie die stationären Punkte und untersuchen deren Stabilität. Bestimmen Sie weiter das asymptotische Verhalten der Lösung, indem Sie obige Gleichung explizit lösen.

### Lösung:

Die rechte Seite definieren wir wieder als  $f(x) = ax + b$ . Es gilt:

$$f(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = -\frac{b}{a}.$$

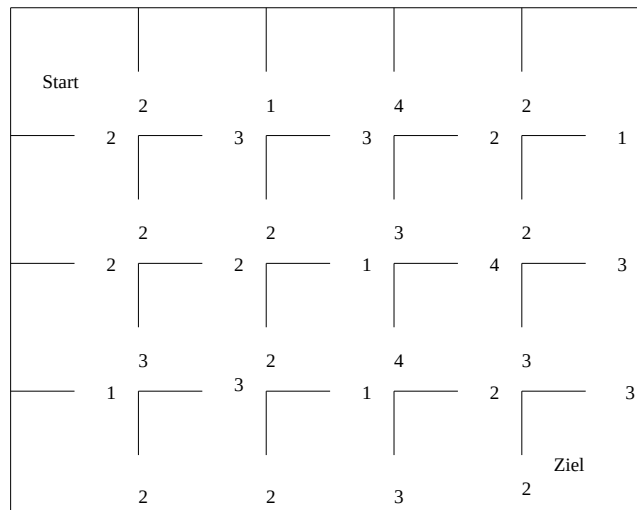
Der einzige stationäre Punkt ist also  $\bar{x} = -b/a$ . Um seine Stabilität zu bestimmen, errechnen wir  $f'(x) = a$ . Der Gleichgewichtspunkt ist also stabil für  $a > 0$  und instabil für  $a < 0$ . Die allgemeine Lösung der Gleichung (Aufgabe 4 der 2. Übung) lautet

$$x(t) = \left(C + \frac{a}{b}\right) \exp(at) - \frac{a}{b}$$

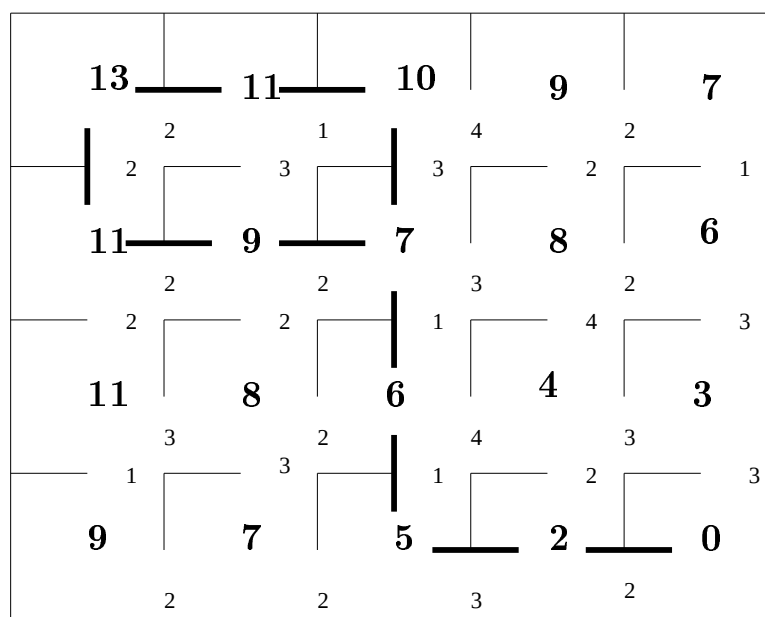
Für  $a < 0$  läuft  $\exp(at)$  gegen Null. In diesem Fall konvergiert also jede Lösung gegen den Gleichgewichtspunkt, dies zeigt, daß dieser sogar global asymptotisch stabil ist. Im umgekehrten Fall ( $a > 0$ ) läuft jede Lösung, die nicht im Gleichgewichtspunkt startet, entweder gegen  $+\infty$  oder  $-\infty$  abhängig vom Vorzeichen von  $C + b/a$ . Dies verdeutlicht die Instabilität von  $\bar{x}$  für  $a > 0$ .

### Aufgabe 11:

Ein Gebiet in Quadraten hat recht ungleiche Beschaffenheit, weshalb man in einigen Quadraten (z.B. mit Gebirgen oder schlechten Straßen) langsamer vorankommt als in anderen Quadraten (z.B. mit Autobahnen über flaches Land). Die untenstehende Karte gibt die Zeiten an, die man benötigt, um von einem Quadrat in ein benachbartes Quadrat zu gelangen. Dabei sind nur Schritte nach Osten (rechts) und Süden (unten) erlaubt. Berechnen Sie den optimalen (schnellsten) Weg mit dem Bellmannschen Prinzip und tragen Sie die einzelnen Werte und diesen Weg in die Karte ein.



### Lösung:



Der optimale Weg ist hier eindeutig bestimmt, die schnellste Reise dauert 13 Zeiteinheiten.

### Aufgabe 12:

Berechnen Sie das optimale Alignment der Sequenzen *AGTTA* und *CGTA*. Ist dies eindeutig ? Verwenden Sie dazu das Scoring aus der Vorlesung und benutzen die folgende Tabelle:

|   | – | A | G | T | T | A |
|---|---|---|---|---|---|---|
| – |   |   |   |   |   |   |
| C |   |   |   |   |   |   |
| G |   |   |   |   |   |   |
| T |   |   |   |   |   |   |
| A |   |   |   |   |   |   |

### Lösung:

Wir berechnen das Tableau analog zum Vorgehen in der 12. Übung:

|   | –  | A  | G  | T  | T  | A   |
|---|----|----|----|----|----|-----|
| – | 0  | -2 | -4 | -6 | -8 | -10 |
| C | -2 | 0  | -2 | -4 | -6 | -8  |
| G | -4 | -2 | 2  | 0  | -2 | -4  |
| T | -6 | -4 | 0  | 4  | 2  | 0   |
| A | -8 | -4 | -2 | 0  | 4  | 4   |

Die folgenden Tabellen stellen die beiden optimalen Wege durch das eben errechnete Tableau dar:

|   | – | A | G | T | T | A |
|---|---|---|---|---|---|---|
| – | x |   |   |   |   |   |
| C |   | x |   |   |   |   |
| G |   |   | x | x |   |   |
| T |   |   |   |   | x |   |
| A |   |   |   |   |   | x |

|   | – | A | G | T | T | A |
|---|---|---|---|---|---|---|
| – | x |   |   |   |   |   |
| C |   | x |   |   |   |   |
| G |   |   | x |   |   |   |
| T |   |   |   | x | x |   |
| A |   |   |   |   |   | x |

Die zu dem optimalen Score von 4 gehörigen optimalen Alignments lauten demnach:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| A | G | T | T | A |
| C | G | – | T | A |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| A | G | T | T | A |
| C | G | T | – | A |