

Übungsblatt Nr. 11

Abgabe am 16.1.2002 vor den Übungen

Aufgabe 1 (8 Punkte):

Die Populationsdynamik einer Population von Schmetterlingen sei gegeben durch

$$\frac{d}{dt}x(t) = -2x(t)(1 - x(t))(7 - x(t)).$$

Bestimmen Sie das Verhalten der Population (stationäre Punkte, Stabilität). Wie könnte man diese Gleichung biologisch interpretieren?

Aufgabe 2 (8 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir die Dynamik von zeitlich kontinuierlichen Systemen in der Nähe eines stationären Punktes untersuchen. Zeigen Sie, daß für einen stationären Punkt $\bar{x}$ des Systems $\dot{x} = f(x)$ gilt:

- (i) $\bar{x}$ stabil $\iff f'(\bar{x}) < 0$
- (ii) $\bar{x}$ instabil $\iff f'(\bar{x}) > 0$

Gehen Sie dabei analog zur lokalen Analyse von zeitlich diskreten Modellen vor (vgl. Abschnitt 1.1.4 der Vorlesung). Die resultierende, lineare Gleichung kann man auch hier explizit lösen.

Aufgabe 3 (vorrechnen):

In dieser Aufgabe betrachten wir die logistische Gleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = rx(t)(1 - x(t)).$$

Berechnen Sie die stationären Punkte und untersuchen deren Stabilität sowohl analytisch als auch graphisch. Wie ist das asymptotische Verhalten der Lösung? Benutzen Sie dazu die explizite Lösung aus Aufgabe 4 der vierten Übung.

Aufgabe 4 (vorrechnen):

Das folgende Modell beschreibt die Ausbreitung ansteckender Krankheiten in einer Population: Sei $I(t)$ der Anteil infizierter Individuen an der Gesamtpopulation zur Zeit t . Dann ist $S(t) = 1 - I(t)$ der Anteil der uninfizierten (=suszeptiblen) Individuen. Die Ansteckungsrate und die Genesungsrate werden als proportional zur Anzahl der Infizierten angenommen. Die Modellgleichung für die relative Anzahl der Infizierten lautet dann

$$\frac{d}{dt}I(t) = \alpha I(t)(1 - I(t)) - \mu I(t).$$

Dabei seien α und μ positive Konstanten. Berechnen Sie die stationären Punkte des Systems und untersuchen deren Stabilität. Für welche Parameterkonstellation verbleibt die Krankheit in der Population?

Aufgabe 5 (Wiederholung):

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = \sqrt{3}\sin(2\pi t) + \cos(2\pi t).$$

Berechnen Sie Amplitude R , Frequenz ω und Phase φ_0 von f und skizzieren die Funktion ohne Verwendung einer Wertetafel.