Universität Köln
Angewandte Mathematik
Johannes Müller
Michael Kurth

Mathematik für Biologen I, WS 01/02

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kuepper/biologie.html

Mathematisches Institut
Raum 116/117
Tel: 0221/4702891

Übungsblatt Nr. 2

Abgabe am 31.10.2001 vor den Übungen

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Geben Sie jeweils die erste Ableitung an:

(a) $f_1(x) = \sqrt{3x^2 + 5}$

(b) $f_2(x) = \exp(-x^2)$

(c) $f_3(x) = -x^2 \exp(x)$

(d) $f_4(x) = \sin(1/x)$ (Falls die Ableitung von $\sin(x)$ nicht bekannt ist, so schlage man sie nach.)

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Ein Virus bricht aufgrund der Inkubationszeit bei einem Kollektiv infizierter Patienten, die sich alle zum Zeitpunkt $t = 0$ angesteckt haben, erst zu einem späterem Zeitpunkt $t > 0$ aus. Für den Anteil $y(t)$ der Patienten, bei denen der Virus noch nicht ausgebrochen ist, gilt nach einem Modell

$$y(t) = \exp(-\frac{1}{2}at^2) \tag{1}$$

mit einer von der Krankheit abhängigen Konstante $a > 0$.

(a) Zeichnen Sie $y(t)$ für $0 \leq t \leq 5$ und $a = 1$ in ein Koordinatensystem.

(b) Stellen Sie eine Formel auf für den Anteil der Patienten, bei denen der Virus ausgebrochen ist.

(c) Zu welchem Zeitpunkt haben wenigstens 75% der Patienten erste Anzeichen der Krankheit, wenn $a = 1$ gilt ? (Hierzu darf die Skizze aus (a) zu Rate gezogen werden.)

(d) Zur Bestimmung von a für einen bestimmten Virustyp werden Probanden mit dem Virus infiziert. Zum Zeitpunkt $t = 1$ sind bereits bei 50% des Kollektivs erste Anzeichen der Krankheit erkennbar. Wie lautet die richtige Wahl von a ?

Aufgabe 3 (vorrechnen):

Nach dem n-ten Tag genügt die Konzentration x_n eines Medikamentes im Körper eines Patienten der Relation

$$x_{n+1} = qx_n + 4, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie q, falls die Konzentration nach 2 Tagen 8.8 und nach 4 Tagen 5.152 beträgt.

(b) Wie groß war die Anfangskonzentration x_0 ?

(c) Konvergiert die Folge x_n ? Wenn ja, gegen welchen Wert ? (Die Antwort sollte ausreichend begründet sein, ein formaler Beweis ist nicht zwingend notwendig.) Was bedeutet dieses Ergebnis für das Modell ?

Aufgabe 4 (vorrechnen):

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}N(t) = \beta N(t) + \gamma. \tag{3}$$

Hierbei seien $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Zeigen Sie: Die Funktion

$$N(t) = \left(C + \frac{\gamma}{\beta}\right) \exp(\beta t) - \frac{\gamma}{\beta} \tag{4}$$

ist für jedes beliebige $C \in \mathbb{R}$ Lösung obiger Differentialgleichung mit Anfangswert $N(0) = C$. Was kann man über das Verhalten der Lösung für $t \to \infty$ aussagen ? Wie könnte man die Differentialgleichung in Bezug auf das Modell einer Bakterienkultur interpretieren ?