Universität Köln
Angewandte Mathematik
Johannes Müller
Michael Kurth

Mathematik für Biologen I, WS 01/02

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kuepper/biologie.html

Mathematisches Institut
Raum 116/117
Tel: 0221/4702891

Übungsblatt Nr. 3

Abgabe am 7.11.2001 vor den Übungen

Aufgabe 1 (4 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir zunächst beweisen, daß $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ ist. Dazu sei $y(x) = \exp(-x)\exp(x)$. Berechnen Sie jetzt die Ableitung von $y(x)$ sowie $y(0)$. Wie kann man jetzt die Behauptung $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ folgern ? Beweisen Sie nun auf analogem Weg die Funktionalgleichung $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Mitscherlich hat im Jahre 1909 aufgrund von Versuchen (Gefäßkulturen) sein berühmtes Ertragsgesetz aufgestellt. Der Ertrag einer Pflanze ist der Gehalt einer Pflanze an einem bestimmten (i.a. für ihren praktischen Nutzwert maßgeblichen) Stoff pro Einheit Trockenmasse. Man bietet der Pflanze (etwa durch Düngung) zusätzlich zu dem natürlichen Gehalt im Boden die Menge x dieses Stoffes an. Es stellt sich nach einiger Zeit in der Pflanze der Ertrag y ein. Der Ertrag ist dann natürlich eine Funktion der angebotenen Stoffmenge, d.h. $y = y(x)$. Das Ertragsgesetz lautet

$$\frac{d}{dx}y(x) = c(A - y(x)), \qquad y(0) = a$$

wobei c, A und a positive Konstanten bezeichnen.

(a) Interpretieren Sie die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung $y(0) = a$.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung (Tip: Aufgabe 4, letzte Übung).

(c) Welchen Wert hat $y(x)$ für $x \to \infty$? Ist dies realistisch?

Aufgabe 3 (vorrechnen):

Das Caesisum-Isotop ^{137}Cs ist ein gefährliches Umweltgift, das sich in radioaktiven Niederschlägen befindet. Es verliert pro Jahr 2.3% seiner Masse durch radioaktiven Zerfall. Jedes Jahr gelange die gleiche Masse M dieses Stoffes in die Umwelt.

(a) Stellen Sie eine Formel auf mit der man berechnen kann, welche Menge des Stoffes nach n Jahren in der Umwelt vorhanden ist. Benutzen Sie hierzu das Summenzeichen und vereinfachen Sie dann die Formel so weit wie möglich (Tip: Aufgabe 3d, 2. Übung).

(b) Welches Gleichgewicht wird sich auf Dauer einstellen ($n \to \infty$) ?

Aufgabe 4 (vorrechnen):

Beim Glukose-Toleranztest injiziert man in einem Zeitraum $[0, T]$ einer Person gleichmäßig Glukose, und mißt während und nach dieser Zeit den Glukoseghalt des Blutes. Sei

$\hat{x}$	Normalwert von Glukose im Blut (etwa 85 mg/dl),
$x(t)$	Ist-Wert der Glukose im Blut,
k_0	Reaktionskonstante,
k_1	Glukosezufluß während des Zeitraumes $[0, T]$.

Dann kann man $x(t)$ im Zeitraum $[0, T]$ durch

$$\frac{d}{dt}x(t) = -k_0(x(t) - \hat{x}) + k_1, \qquad x(0) = \hat{x}$$

beschreiben und im Zeitraum (T, ∞) durch

$$\frac{d}{dt}x(t) = -k_0(x(t) - \hat{x}).$$

(a) Interpretieren Sie die Differentialgleichung.

(b) Lösen Sie die Gleichungen. Welche Anfangsbedingung muß man für die zweite Gleichung zum Zeitpunkt $t = T$ wählen?

(c) Zeichnen Sie die Lösung qualitativ.