
Übungsblatt Nr. 4

Abgabe am 14.11.2001 vor den Übungen

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Berechnen Sie die Taylor-Polynome (um $x_0 = 0$) von $f(x) = \sin(x)$ der Ordnung $n = 0, 1, 2, 3$ und zeichnen Sie diese zusammen mit $\sin(x)$ für $-\pi \leq x \leq \pi$ in ein Koordinatensystem. Wie sieht die Taylor-Reihe von $\sin(x)$ aus?

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Bestrahlt man gewisse Stämme von Tabak-Viren (z.B. Ancuba) mit Röntgenstrahlen der Dosis R , so wird ein Teil der Viren inaktiviert. Die Anzahl der überlebenden Viren $N(R)$ nimmt dabei exponentiell mit der Röntgendosis ab:

$$N(R) = N_0 \exp(-\sigma R).$$

Hierbei ist die Zerfallskonstante $\sigma > 0$ abhängig vom Biotop.

- (a) Welche Bedeutung hat N_0 ?
- (b) Welche Differentialgleichung beschreibt die Anzahl überlebender Viren?
- (c) Sei nun $\sigma = 0.2$. Welche Dosis R ist erforderlich, um 90% der Viren zu inaktivieren?

Aufgabe 3 (vorrechnen):

Bei der C^{14} -Methode zur Altersbestimmung nutzt man aus, daß in lebenden Organismen das Verhältnis von C^{14} und C^{12} einen festen Wert c_0 hat. In toten Organismen zerfällt das Isotop C^{12} praktisch nicht, während das Isotop C^{14} mit einer Halbwertszeit von 5760 Jahren zerfällt (d.h. nach 5760 Jahren ist nur noch ein die Hälfte des Isotops vorhanden). Im Nildelta wurde 1989 ein hölzerner Bootsbalcken gefunden, bei dem das Verhältnis von C^{12} auf 75% von c_0 gesunken war. Bestimmen Sie das Alter des Balkens.

Aufgabe 4 (vorrechnen):

Die logistische Differentialgleichung

$$y'(x) = ay(x)(1 - y(x))$$

wurde von Verhulst (1838) zur Untersuchung von Populationsdynamiken eingeführt und spielt in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle.

- (a) Zeigen Sie: Die Funktion

$$\text{logit}(x) = \frac{\exp(ax + b)}{1 + \exp(ax + b)}$$

ist Lösung der logistischen Differentialgleichung.

- (b) Wie muss man die Konstante b wählen, so daß die Anfangsbedingung $y(0) = c$ erfüllt ist?
- (c) Zeichnen Sie $\text{logit}(x)$ für $b = 0$ und $a = 1$ bzw. $a = -1$ zwischen $x = -5$ und $x = 5$.
- (d) Berechnen Sie die Ableitung der Inversen von $y = \text{logit}(x)$ an der Stelle $y = 1/2$ durch
 1. Anwenden der Formel über die Ableitung der Umkehrfunktion,
 2. explizites Berechnen der Umkehrfunktion und deren Ableitung.