Universität Köln
Angewandte Mathematik
Johannes Müller
Michael Kurth

Mathematik für Biologen I, WS 01/02

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kuepper/biologie.html

Mathematisches Institut
Raum 116/117
Tel: 0221/4702891

Übungsblatt Nr. 6

Abgabe am 28.11.2001 vor den Übungen

Aufgabe 1 (8 Punkte):

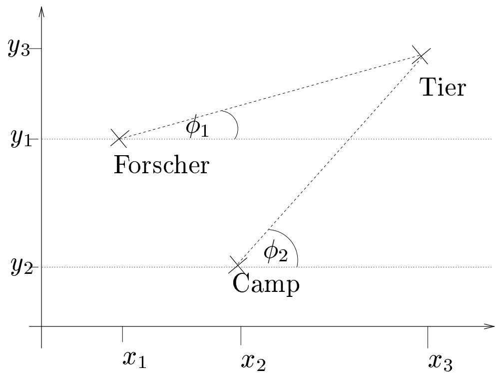
Um die Artenvielfalt von Bäumen in einem sibirischen Mischwald zu untersuchen werden in insgesamt 6 jeweils 1 Hektar groß Parzellen die verschiedenen Arten $A_1, A_2, \ldots$ bestimmt. Insgesamt wurden 6 Arten gefunden, die genauen Daten lassen sich folgender Tabelle entnehmnen:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1. Parzelle	x		x			
2. Parzelle		x		x	x	
3. Parzelle					x	x
4. Parzelle	x	x	x			
5. Parzelle		x		x		
6. Parzelle			x		x	

Berechnen Sie den Jackknife-Schätzer für die Anzahl der verschiedenen Baumarten in dem Mischwald.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Ein Forscher möchte die Bewegungen eines Tieres beobachten. Dazu wird das Tier mit einem Peilsender ausgestattet. Mit Hilfe eines Empfängers kann der Forscher nun die Richtung orten, in der das Tier sich aufhält. Einen weiteren Empfänger hat er in einem festen Camp angebracht, vgl. dazu folgende Skizze:



Die Position des Forschers sei also (x_1, y_1), die des Camps (x_2, y_2) und die des Tieres (x_3, y_3), die jeweiligen Winkel zur x-Achse seine mit ϕ_1 und ϕ_2 bezeichnet. Angenommen, die Position des Tieres sei bekannt. Wie lauten die Winkel ϕ_1 und ϕ_2 ?

Zusatzfrage (2 Extrapunkte):

Wenn nur die Winkel und die Position des Forschers und des Camps bekannt sind, wie kann man dann die Position des Tieres errechnen ?

Bitte wenden !

Aufgabe 3 (vorrechnen):

In dieser Aufgabe soll die "Güte" des Jackknife-Algorithmus an einem konkreten Beispiel verdeutlicht werden: Das Ziel ist es, die Anzahl der Seiten eines Würfels (bekanntlich 6 ;-)) zu schätzen. Dazu nehme man einen Würfel zur Hand und werfe ihn sechs Mal. Nun trage man in folgende Tabelle ein Kreuz ein, falls im i-ten Wurf die Ziffer k geworfen wurde.

	1	2	3	4	5	6
1. Wurf						
2. Wurf						
3. Wurf						
4. Wurf						
5. Wurf						
6. Wurf						

Berechnen Sie nun anhand der Tabelle den Jackknife-Schätzer für die Zahl der Seiten eines Würfels.

Das Ergebnis ist natürlich abhängig von den Würfen. Bei der Beurteilung der Güte des Verfahrens beachte man, daß eine naive Schätzung so gut wie nie 6 Seiten ergeben würde.

Aufgabe 4 (vorrechnen):

In vielen Problemen der Biologie spielen Zeitverzögerungen eine wichtige Rolle. In diesem Zusammenhang werden oft Differentialgleichungen mit Zeitverzögerung untersucht. Hier betrachten wir das Problem

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(t-\tau).$$

(a) Für welche τ ist nun $x(t) = \sin(t)$ eine Lösung obiger Gleichung ?

Tip: Nach dem Ableiten von $x(t)$ erhält man eine Gleichung, die man analytisch, aber auch durch Nachdenken, lösen kann.

(b) Sei $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \exp(-x\tau)$, $\tau > 0$. Besitzen die Funktionen f_1 und f_2 einen Schnittpunkt, d.h. existiert eine Lösung der Gleichung $f_1(x) = f_2(x)$?

(c) Sei nun $\tau > 0$. Zeigen Sie, daß auch eine Lösung der Form $y(t) = \exp(at)$ existiert.

Tip: Teil (b) der Aufgabe benutzen.

Aufgabe 5 (Wiederholung):

Geben Sie jeweils die erste Ableitung an:

(a) $f_1(x) = \sqrt{\exp(x)}$

(b) $f_2(x) = x/\sin(x^2)$

(c) $f_3(x) = \sin(x)/\cos(x)$

(d) $f_4(x) = \ln(x^2)$