
Übungsblatt Nr. 8

Abgabe am 12.12.2001 vor den Übungen

Aufgabe 1 (8 Punkte):

Die physikalische Leistung L ist definiert als die momentane Abgabe von Energie pro Zeiteinheit. Sei $E(t)$ die gesamte bis zur Zeit t abgegebene Energie, dann ist also

$$L(t) = \dot{E}(t)$$

Nehmen wir nun an, daß die Leistung eines Marathonläufers gemäß der Formel

$$L(t) = L_0 \frac{1}{1 + \lambda t}$$

abnimmt. Wie groß ist dann die gesamte Energie, die er zum Zeitpunkt $t = 1$ abgegeben hat ?

Tip: Eine Stammfunktion von $1/(1+x)$ ist $\ln(1+x)$.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Die meisten Populationen haben Todes- und Geburtsraten, die von der Jahreszeiten abhängen. Sei $\mu(t)$ die zeitabhängige Todesrate und $\beta(t)$ die zeitabhängige Geburtsrate. Da die beiden Raten periodisch sein sollen, gilt

$$\mu(t+1) = \mu(t), \quad \beta(t+1) = \beta(t).$$

Die Dynamik der Populationsgröße $x(t)$ wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\mu(t)x(t) + \beta(t)x(t)$$

beschrieben.

(a) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t (-\mu(s) + \beta(s))ds\right)$$

die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ erfüllt.

(b) Bestimmen Sie eine Konstante A , so daß

$$x(n) = x_0 \exp(An)$$

für alle natürlichen Zahlen n gilt. Wie kann man A interpretieren ?

(c) In einem vereinfachten Modell wird nun die Geburtsrate als konstant über das Jahr angenommen, während bei der Todesrate zwischen Sommer- und Wintersterblichkeit unterschieden wird, also

$$\beta(t) = \beta, \quad \mu(t) = \begin{cases} \mu_1, & 0 \leq t \leq 1/4, \quad 3/4 \leq t \leq 1 \\ \mu_2, & 1/4 < t < 3/4. \end{cases}$$

Seien $\beta = 2$ und $\mu_1 = 3$ gegeben. Wie muss μ_2 gewählt werden, so daß die Population nicht ausstirbt ? Skizzieren Sie $x(t)$ in den ersten 5 Jahren ($0 \leq t \leq 5$) für $\beta = 2$, $\mu_1 = 3$ und (i) $\mu_2 = 1/2$, (ii) $\mu_2 = 1$ bzw. (iii) $\mu_2 = 2$.

Aufgabe 3 (vorrechnen):

Wir betrachten einen ringförmigen Glastubus der Länge L (siehe Zeichnung).

Man kann den Durchmesser dieses Tubus vernachlässigen, d.h. der Ort ist hinreichend genau mit $x \in [0, L]$ angegeben. Der Tubus ist mit Wasser und Alkohol gefüllt. Sei $u(x, t)$ die Dichte des Alkohols zu Zeit t , d.h. die Menge von Alkohol zur Zeit t zwischen den Orten x_1 und x_2 ist gegeben durch das Integral $\int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx$. Da unser Tubus ringförmig ist, gilt $u(x, t) = u(x + L, t)$, d.h. im Ort ist die Dichte L -periodisch.

Die zeitliche Entwicklung dieser Dichte wird durch die Diffusionsgleichung beschrieben,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = d \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

(erste Ableitung nach t gleich d mal zweiter Ableitung nach x). Dabei ist d eine positive Konstante, die die Geschwindigkeit der Diffusion des Stoffes beschreibt.

(a) Zeigen Sie durch Einsetzen, daß

$$u_n^{(1)}(x, t) = \exp\left(-d\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{bzw.} \quad u_n^{(2)}(x, t) = \exp\left(-d\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ Lösungen der Diffusionsgleichung sind.

(b) Man kann zeigen, daß dann auch

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n^{(1)}(x, t) + b_n u_n^{(2)}(x, t)$$

mit beliebigen reellen Konstanten a_n , b_n eine Lösung ist. Wie lautet die Lösung obiger Diffusionsgleichung mit Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = 2 - \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{L}x\right)?$$

(c) Wie sieht $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ aus? Warum?

Aufgabe 4 (vorrechnen):

Eine Droge wird zur Zeit $t = 0$ in einen Muskel injiziert. Der Muskel gibt die Droge mit der konstanten Rate m in das Blut ab; im Blut wird die Droge mit der konstanten Rate $b \neq m$ abgebaut. Die zur Zeit t im Blut enthaltene Drogenmenge ist dann gegeben durch

$$u(t) = \frac{c \cdot m}{b - m} (\exp(-mt) - \exp(-bt)).$$

Die Abbaugeschwindigkeit v_B im Blut ist proportional zur vorhandenen Menge u , also $v_B(t) = bu(t)$.

(a) Sei $U(T)$ die gesamte im Zeitintervall $[0, T]$ vom Blut abgebaute Drogenmenge. Begründen Sie, daß $U(T)$ durch $\int_0^T v_B(t) dt$ gegeben ist und berechnen Sie dieses Integral.

(b) Welches Verhalten stellt sich für $T \rightarrow \infty$ ein. Was bedeutet das?

(c) Der Muskel hat die Abgabegeschwindigkeit $v_M(t) = c \cdot m \cdot \exp(-mt)$. Wie groß ist die gesamte vom Muskel abgegebene Drogenmenge?

Aufgabe 5 (Wiederholung):

Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \cos(2x)$ um $x_0 = 0$.

