Universität Köln
Angewandte Mathematik
Johannes Müller
Michael Kurth

Mathematik für Biologen I, WS 01/02
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kuepper/biologie.html

Mathematisches Institut
Raum 116/117
Tel: 0221/4702891

Übungsblatt Nr. 9

Abgabe am 19.12.2001 vor den Übungen

Aufgabe 1 (8 Punkte):

Führen Sie die graphische Iteration für das Modell $x_{n+1} = rx_n$ und (i) $r = 1/2$, (ii) $r = 3/2$, (iii) $r = -1/2$ und (iv) $r = -3/2$ durch. Welche Aussagen lassen sich über das langfristige Verhalten machen ?

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Eine Population verhalte sich gemäß dem Rickert-Modell

$$x_{n+1} = cx_n \exp(-kx_n).$$

(i) Skalieren Sie das Problem derart, daß es die Form $x_{n+1} = rx_n \exp(-x_n)$ hat.

(ii) Für welche r hat das Modell zwei nichtnegative, stationäre Punkte ?

(iii) Interpretieren Sie das Ergebnis aus (ii).

Aufgabe 3 (vorrechnen):

Angenommen, ein Individum bekommt täglich ein Medikament zugeführt, so daß die Zufuhr einer Medikamentenkonzentration im Blut von d [mg/l] entspricht. Andererseits wird das Medikament durch Körperorgane ausgeschieden und zwar mit einer täglichen Abbaurate von p Prozent des Medikamentes.

(i) Geben Sie ein Entwicklungsgesetz für x_n an, wenn x_n die Medikamentenkonzentration n Tage nach Beginn der Medikamenteneingabe darstellt.

(ii) Gibt es einen Gleichgewichtspunkt ? Wenn ja, bestimmen Sie diesen.

(iii) Wie stark muss die tägliche Zufuhr des Medikamentes (also d) gewählt werden, wenn x_n gegen einen vorgegebenen optimalen Wert x_{opt} konvergieren soll ? Begründen Sie Ihre Antwort sowohl analytisch als auch mit Hilfe der graphischen Iteration.

Aufgabe 4 (vorrechnen):

Betrachtet wird die Größe x_n einer Population in einem beschränkten Lebensraum zum Zeitpunkt n. Wird die Population zusätzlich zu den ohnehin auftretenden Sterbefällen noch bejagt, so lässt sich x_{n+1} aus x_n durch

$$x_{n+1} = q_n x_n - kx_n$$

berechnen. Dabei ist $q_n = c(L - x_n)$ die Reproduktionsrate, die proportional zur Größe des noch vorhandenen Lebensraumes ist und kx_n die Anzahl der durch Jagd getöten Lebewesen mit einer konstanten Jagdintensität k.

(i) Erstellen Sie ein logistisches Entwicklungsgesetz in der Form $x_{n+1} = ax_n - bx_n^2$, d.h. geben Sie die Kontsanten a und b in Abhängigkeit von c, L und k an.

(ii) Skalieren Sie das Problem derart, daß nur noch eine Konstante auftritt.

(iii) Der geschätzte Lebensraum für Blauwale beträgt 150000 Tiere, die Reproduktionsrate liegt bei $q = 1.08$. Die Proportionalitätskonstante wird als $c = 9/1250000$ angenommen.

  (a) Sei zunächst $k = 0$ (d.h. keine Jagd). Im Moment gibt es ca. 2000 Blauwale. Berechnen Sie die Blauwalpopulation der nächsten zwei Jahre. Gibt es ein Gleichgewicht ? Bestimmen Sie dieses gegebenenfalls. Gegen welchen Wert konvergiert die Folge ?

  (b) Sei jetzt $k = 0.04$. Gibt es auch hier ein Gleichgewicht ? Wenn ja, bestimmen Sie dieses. Gegen welchen Wert konvergiert die Folge mit $x_0 = 2000$?

  (c) Wie groß darf k höchstens werden, damit die Blauwale nicht ausgerottet werden ?

Bitte wenden !

Aufgabe 5 (Wiederholung):

Ordnen Sie die folgenden Funktionen den zugehörigen Graphen zu.

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = \exp(x), & f(x) = \ln(x), & f(x) = \cos(3x) \\
f(x) = \sqrt{x}, & f(x) = \sin(3x), & f(x) = \exp(x^2) \\
f(x) = \sin(x), & f(x) = \sqrt{4x}, & f(x) = x^2
\end{array}
$$