MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
19.12.2002

Übungsaufgaben zu Mathematik für Biologen I

http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie

Die folgende Aufgaben sind freiwillig und sollen zur Wiederholung des Stoffes und zur Klausurvorbereitung dienen. Sie werden weder abgegeben noch besprochen, allerdings gibt es im neuen Jahr Lösungshinweise zur Selbstkontrolle. Die Anzahl der Aufgaben sagt ausdrücklich nichts über die Länge der Klausur aus, auch der Schwierigkeitsgrad geht teilweise über den der Klausuraufgaben hinaus. Daher ist dieser Zettel nicht als Probeklausur anzusehen.

Aufgabe 1

Ein mol eines Stoffes entspricht der Menge von $6 \cdot 10^{23}$ Teilchen dieses Stoffes. Für ein Experiment benötigen Sie nun 100 ml einer 2-mol Lösung, also 2 mol pro Liter Wasser. Im Labor finden Sie aber nur einen Liter 10-mol Lösung. Bestimmen Sie die Menge Wasser und die minimale Menge dieser Lösung, die gemischt das gewünschte Ergebnis liefern.

Aufgabe 2

Das Caesisum-Isotop ^{137}Cs ist ein gefährliches Umweltgift, das sich in radioaktiven Niederschlägen befindet. Es verliert pro Jahr 2.3% seiner Masse durch radioaktiven Zerfall. Jedes Jahr gelange die gleiche Masse M dieses Stoffes in die Umwelt.

(i) Stellen Sie eine Formel auf mit der man berechnen kann, welche Menge des Stoffes nach n Jahren in der Umwelt vorhanden ist. Benutzen Sie hierzu das Summenzeichen und vereinfachen Sie dann die Formel so weit wie möglich.

(ii) Welches Gleichgewicht wird sich auf Dauer einstellen ($n \to \infty$) ?

Aufgabe 3

Ein Enzym habe $N = 6$ Bindungsstellen. Auf wie viele verschiedene Weisen können $i = 2$ Bindestellen besetzt werden? Berechnen Sie diesen Wert und fertigen Sie ein schematisches Bild der verschiedenen Enzym-Substrat-Komplexe an. Wie viele verschiedene Komplexe kann dieses Enzym insgesamt bilden ?

Aufgabe 4

Gegeben seien die Funktionen $f(x) = x(x+2)^2$ und $g(x) = (3x+4)^4 - 81x^4$.

(i) Bestimmen Sie den Grad von f, g $f+g$ und $f \cdot g$.

(ii) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f/g und g/f.

(iii) Wie verhält sich f/g bzw. g/f für $x \to \infty$?

Aufgabe 5

Bei Ausgrabungen in der Kölner Altstadt wurde kürzlich ein Fossil gefunden, bei dem das Verhältnis von C^{14} und C^{12} auf 60% von c_0 gesunken war. Wie alt war das Fossil zum Zeitpunkt der Ausgrabung ? Verwenden Sie dazu die C^{14}-Methode zur Altersbestimmung (vgl. Aufgabe 3, 6. Übung).

Aufgabe 6

Geben Sie jeweils die erste Ableitung und den Definitionsbereich der Funktionen an:

(i) $f_1(x) = \sqrt{\exp(x)}$

(ii) $f_2(x) = x/\sin(x^2)$

(iii) $f_3(x) = \sin(x)/\cos(x)$

(iv) $f_4(x) = \ln(x^2)$

Aufgabe 7

Experimentelle Messungen haben gezeigt, dass der Energieverbrauch eines Wellensittichs beim Fliegen in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit v näherungsweise durch folgende Formel gegeben ist

$$E(v) = \frac{1}{v}\left(0.01(v-20)^2 + 21\right).$$

Dabei wird E in Kalorien pro g Körpergewicht pro km Flugstrecke gemessen und die Geschwindigkeit in km/h. Man geht dabei davon aus, dass $v \geq 10$, da der Wellensittich sonst abstürzt. Bei welcher Geschwindigkeit ist der Energieverbrauch minimal ?

Aufgabe 8

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit der Schwingungsgleichung

$$\ddot{x}(t) = -k^2 x(t),$$

welche eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. Zeigen Sie, dass

$$x(t) = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt)$$

für beliebige Konstanten C_1 und C_2 die Gleichung löst. Falls die Anfangsbedingungen als $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = -1$ gegeben sind, wie lautet die Lösung ?

Aufgabe 9

Vorgelegt sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = (x-1)(x-3), \;\; x(0) = C.$$

(i) Zeigen Sie, dass

$$x(t) = 1 + 2\frac{1-C}{\exp(2t)(C-3) + 1 - C}$$

die Differentialgleichung löst.

(ii) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $x(t)$.

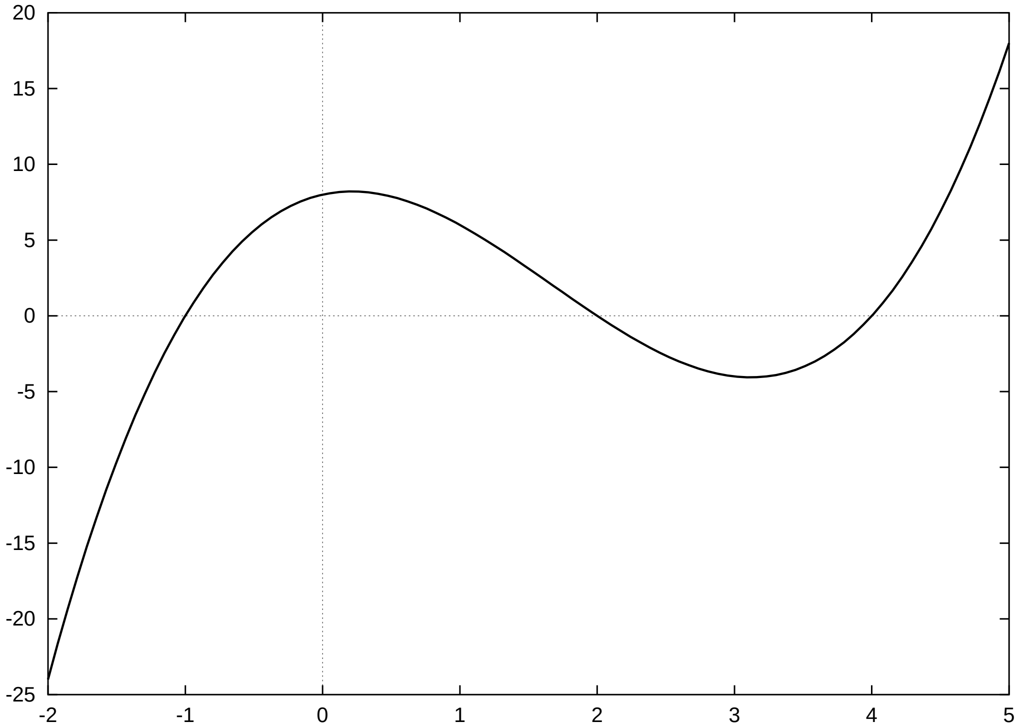
(iii) Für welche Werte von C existiert der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x(t)$ und wie lautet dieser ?

Aufgabe 10

Führen Sie wie in Aufgabe 1 der 10. Übung eine qualitative Analyse der Differentialgleichung aus der vorigen Aufgabe, also $\dot{x} = (x-1)(x-3)$ durch und vergleichen Sie die hier erzielten Ergebnisse mit denen aus der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 11

Vorgelegt sei die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$. Die Gestalt von f kann dabei folgeder Zeichnung entnommen werden:



Tragen Sie die stationären Punkte und deren Stabilität sowie die Richtungspfeile der Evolution in das Diagramm ein. Übertragen Sie dann die Ergebnisse in eine $(t, x(t))$-Diagramm.

Aufgabe 12

Berechnen Sie die folgenden Integrale

(i)

$$\int_1^5 \frac{1}{r^3} dr$$

(ii)

$$\int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) dt$$

(iii)

$$\int_1^2 \ln(t)\sqrt{t} dt$$

(iv)

$$\int_0^\pi \cos(t)\exp(2t) dr$$

(v)

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{ax^2+b}} dx \text{ mit } a, b > 0$$

Für diejenigen, denen das griechische Alphabet und die Aussprache der griechischen Buchstaben nicht so geläufig sind, ist folgende Tabelle gedacht:

α	alpha	β	beta	$\gamma,\ \Gamma$	gamma	δ	delta
$\epsilon,\ \varepsilon$	epsilon	ζ	zeta	η	eta	$\theta,\ \vartheta$	theta
ι	iota	κ	kappa	λ	lambda	μ	my ("mü")
ν	ny ("nü")	ξ	xi	o	omikron	$\pi,\ \Pi$	pi
$\rho,\ \varrho$	rho	$\sigma,\ \Sigma$	sigma	τ	tau	υ	ypsilon
$\phi,\ \varphi$	phi	χ	chi	ψ	psi	$\omega\ \Omega$	omega

Tabelle der griechischen Buchstaben