MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
25.10.2002

Lösungshinweise zur 1. Übung

http://www.mi.uni-koeln.de/∼mkurth/biologie

Aufgabe 1

(i) Ein mol eines Stoffes entspricht der Menge von $6 \cdot 10^{23}$ Teilchen dieses Stoffes. Für ein Experiment benötigen Sie nun 60 ml einer 4-mol Lösung, also 4 mol pro Liter Wasser. Im Labor finden Sie aber nur einen Liter 20-mol Lösung. Bestimmen Sie die Menge Wasser und die minimale Menge dieser Lösung, die gemischt das gewünschte Ergebnis liefern.

Lösung:

Diese Aufgabe steht nicht direkt im Kontext der Vorlesung, dafür kann jedem Biologen dieses Problem in der Praxis begegnen. Wir benötigen also 60 ml einer 4-mol Lösung. Sei x die Menge der 20-mol Lösung in ml, die wir entnehmen müssen. Dann muss gelten:

$$4\text{mol} \cdot 60\text{ml} = 20\text{mol} \cdot x,$$

also $x = 4 \cdot 60/20 = 240/20 = 12$ ml. Dies füllen wir dann noch mit $60 - 12 = 48$ ml Wasser auf, und erhalten die gewünschte Menge der 4-mol Lösung.

(ii) 1000 Zellen einer Bakterienkultur wurden für 10 Stunden in einem Nährmedium aufgezogen, in dem sie sich jede Stunde einmal verdoppeln. Danach wurde 0,1 % der nun vorhandenen Zellen in ein Medium überimpft, in dem die Verdoppelungszeit 30 min. beträgt. Wie viele Zellen befinden sich nach weiteren 5 Stunden Inkubationszeit in diesem Ansatz?

Lösung:

Die 1000 Zellen verdoppeln sich in der ersten Stunde und werden zu $2 \cdot 1000$ Zellen, in der zweiten Stunde verdoppeln diese sich wieder. Insgesamt existieren dann $2 \cdot 2 \cdot 1000 = 2^2 \cdot 1000$ Zellen. Nach drei Stunden haben sich die Zellen abermals verdoppelt, jetzt sind es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1000 = 2^3 \cdot 1000$. Dies setzt sich induktiv fort, nach 10 Stunden befinden sich also $2^{10} \cdot 1000 = 1024000$ Zellen in der Nährlösung. 0.1% davon berechnen sich zu $1024000/1000 = 1024$. Diese 1024 Zellen verdoppeln sich in den nächsten 5 Stunden zehnmal, es sind dann $2^{10} \cdot 1024 = 1024^2 = 1048576$ Zellen.

Aufgabe 2

In seiner 1913 erschienenen Arbeit „Über Geschwindigkeit und Größe der Hefevermehrung in Würze“ untersuchte T. Carlson die Entwicklung einer Population von Hefezellen. Das Ergebnis kann man folgender Tabelle entnehmen:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	18	29	47	71	119	174	257	351	441	513

Die Zeit t hat dabei die Einheit Stunden, der Umfang der Population der Hefezellen ist in μl Zellvolumen pro 100 ml Medium angegeben.

(i) Die in der Tabelle verzeichneten Zeitpunkte seien mit $t_1, \ldots, t_{10}$ bezeichnet. Berechnen Sie die durchschnittlichen Veränderungsraten

$$\overline{v}_i := Q([t_{i+1}, t_i]) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \quad i = 1, \ldots, 9,$$

in den Intervallen $[t_i, t_{i+1}]$, wobei die Zuordnung $x : t_i \rightarrow x(t_i)$ durch die Tabelle gegeben sei.

Lösung:

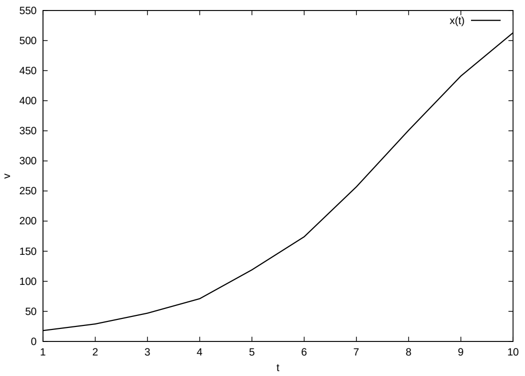
Die Werte für v_i kann man untenstehender Tabelle entnehmen:

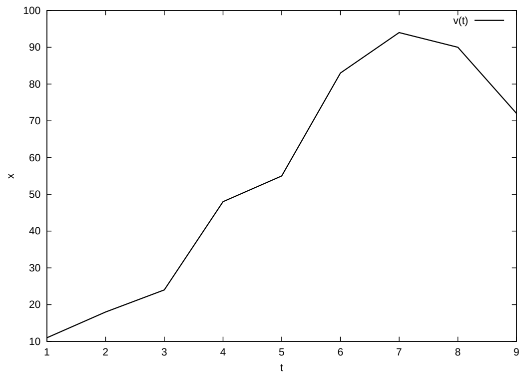
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	18	29	47	71	119	174	257	351	441	513
v	11	18	24	48	55	83	94	90	72	-

Die Berechnung der v_i gestaltet sich dabei einfach, da der Nenner wegen $t_{i+1} = t_i + 1$ stets gleich 1 ist.

(ii) Zeichnen Sie die Funktionen $f : i \rightarrow t_i$, $i = 1, \ldots, 10$ und $g : t_i \rightarrow \overline{v}_i$, $i = 1, \ldots, 9$ in zwei Diagramme ein. Tragen Sie auch eine kontinuierliche Approximation der Daten ein.

Lösung:





Aufgabe 3

Aufgrund des Waldsterbens werden in einem Wald von 10 ha in jedem Winter die schwer erkrankten Bäume gefällt. Wieviel ha Wald stehen noch nach 1,2,3,4,5,6 Jahren, wenn der Anteil der schwer erkrankten Bäume am Gesamtbestand

(i) im ersten Jahr 3% beträgt und sich der Prozentsatz jährlich verdoppelt ?

Lösung:

Nach dem ersten Jahr werden also 3% der $10ha$ gefällt, also $0.3ha$. Es bleiben noch $9.7 = 10 \cdot (1 - 0.03)ha$. Nach dem zweiten Jahr werden davon nun $2 \cdot 3\% = 6\%$ gefällt, es bleiben $10 \cdot (1 - 0.03) \cdot (1 - 0.06) = 9.118ha$ übrig. Nach n Jahren stehen dann noch

$$10 \cdot (1 - 0.03) \cdot (1 - 2 \cdot 0.03) \cdot \ldots \cdot (1 - 2^n \cdot 0.03) = 10\Pi_{k=1}^{n}(1 - 2^k \cdot 0.03)ha.$$

Die Ergebnisse kann man folgender Tabelle entnehmen, wobei wir auf die dritte Nachkommastelle gerundet haben.

t	1	2	3	4	5	6
x	9.7	9.118	8.024	6.098	3.171	0.127

(ii) jährlich 20% beträgt ?

Lösung:

Nach dem ersten Jahr werden also 20% der $10ha$ gefällt, also $2ha$. Es bleiben noch $8 = 10 \cdot (1 - 0.2)ha$. Nach dem zweiten Jahr werden davon wiederum nun 20% gefällt, es bleiben $10 \cdot (1 - 0.2) \cdot (1 - 0.2) = 10 \cdot (1 - 0.2)^2 ha$ übrig. Nach n Jahren stehen dann noch

$$10 \cdot (1 - 0.2)^n ha.$$

Die Ergebnisse kann man folgender Tabelle entnehmen, wobei wir auf die dritte Nachkommastelle gerundet haben.

t	1	2	3	4	5	6
x	8	6.4	5.12	4.096	3.277	2.621

Tragen Sie die Daten jeweils in eine Tabelle ein und zeichnen Sie die Entwicklungskurven für den Waldbestand in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Lösung: