MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
17.1.2003

Lösungshinweise zur 10. Übung

http://www.mi.uni-koeln.de/∼mkurth/biologie

Aufgabe 1

Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = x(t)(1 - x(t)) \exp(x(t)) \text{ mit } x(0) > 0.$$

Man schreibt bekanntlich auch oft kurz $\dot{x} = f(x)$ mit

$$f(x) = x(1 - x) \exp(x).$$

Führen Sie eine komplette qualitative Analyse der Differentialgleichung durch, bestimmen Sie also

- das Monotonieverhalten,
- die stationären Punkte und deren Stabilität,
- das Grenzverhalten für $t \to \infty$,
- die Existenz von Wendepunkten.

Zeichnen Sie dazu den Graphen von f qualitativ, geben Sie die stationären Punkte und deren Stabilität an, und tragen Sie die Richtungspfeile der Evolutionen ein. Übertragen Sie die Ergebnisse weiter in ein $(t, x(t))$-Diagramm.

Lösung:

Die qualitativen Eigenschaften der Lösung $x(t)$ können der qualitativen Gestalt von f entnommen werden. Es ist

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ oder } x = 1.$$

Um die Extremstellen von f zu berechnen, untersuchen wir die Ableitung

$$f'(x) = (1 - x) \exp(x) - x \exp(x) + x(1 - x) \exp(x) = (1 - x - x^2) \exp(x),$$

also folgt

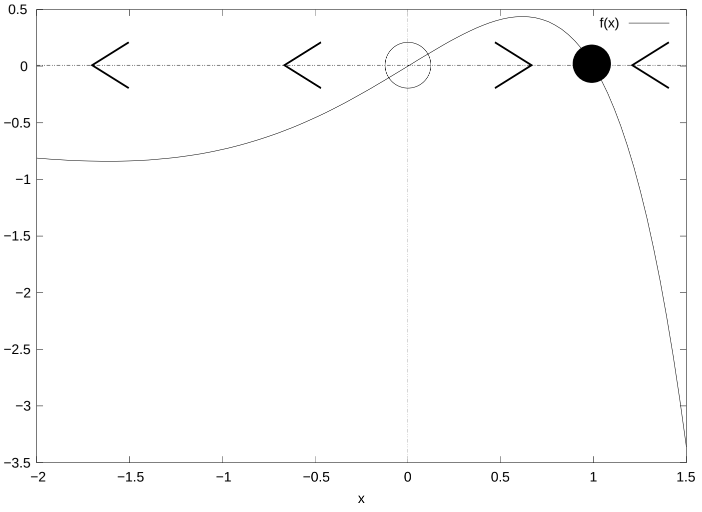
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x - 1 = 0 \;&\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ &\Leftrightarrow\; x = x_1 \sim -1.618 \text{ oder } x = x_2 \sim 0.618. \end{aligned}$$

Es gilt weiter

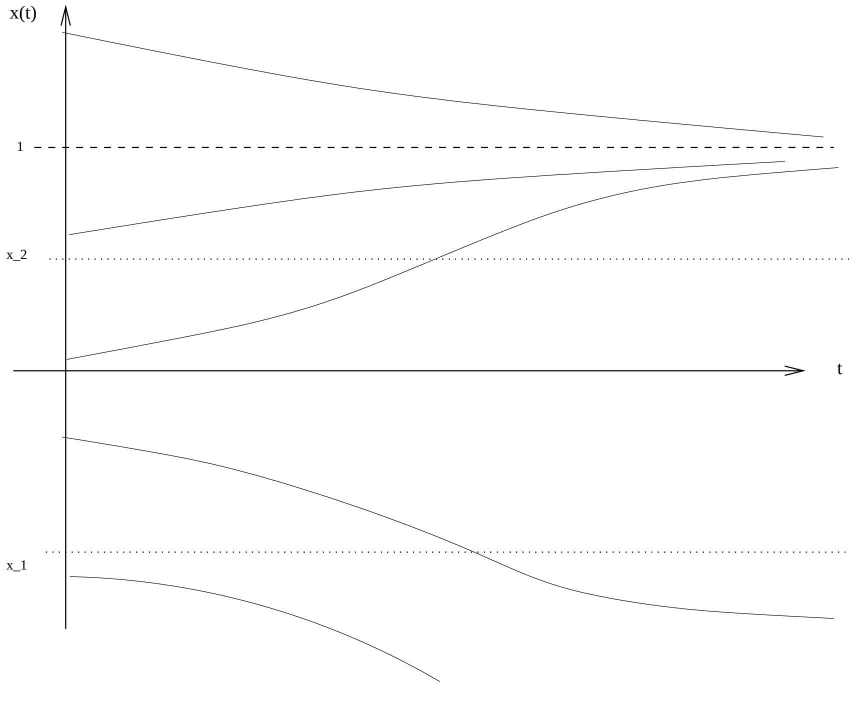
$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \text{ für } x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ oder } x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ f'(x) < 0 \text{ für } \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Daher liegt in x_1 ein Minimum von f vor und in x_2 ein Maximum von f. Für $x \to \infty$ läuft $f(x)$ gegen $-\infty$, wohingegen für $x \to -\infty$ die Funktion gegen Null geht. Nun sind wir in der Lage, die Funktion f zu skizzieren, vgl. untenstehende Abbildung.

Bemerkung: Die bisherigen Schritte entsprechen einer Kurvendiskussion von f und dienten lediglich dazu, die Funktion f zu skizzieren. Zur qualitativen Analyse der Differntialgleichung reicht eine solche Skizze alleine aus, vgl. Aufgabe 11 der Übungsaufgaben.



Anhand der Gestalt von f erkennen wir, dass 0 und 1 die stationären Punkte der Differentialgleichung sind. Für $0 < x < 1$ ist die Lösung monoton steigend, im umgekehrten Fall monoton fallend. Daher ist der stationäre Punkt $x = 1$ stabil, wohingegen $x = 0$ instabil ist. Weiter lässt sich daraus folgern, dass alle Lösungen mit positiven Anfangswerten für $t \to \infty$ gegen den stationären Punkt $x = 1$ laufen. Liegt der Anfangswert zwischen 0 und x_2 oder ist er kleiner als x_1, so besitzt die zugehörige Lösung einen Wendepunkt, und zwar dort, wo sie diesen Wert annimmt. Die Lösungen mit Anfangswert kleiner als x_1 oder grösser als x_2 besitzen keinen Wendepunkt. Dies alles kann auch dem folgenden $(t, x(t))$-Diagramm entnommen werden.



Was ändert sich, falls f durch $\tilde{f}(x) = x(1 - x)$ ersetzt wird ?

Lösung:

Ersetzen wir f durch $\tilde{f}$, so bleiben die wichtigen Eigenschaften erhalten. Beide Funktionen, f und $\tilde{f}$, besitzen die gleichen Nullstellen und stets das gleiche Vorzeichen. Daher bleiben stationäre Punkte und deren Stabilität, das Monotonieverhalten der Lösung sowie das Verhalten für $t \to \infty$ unverändert. Lediglich die Wendepunkte ändern sich im qualitativen Verhalten: Die Funktion $\tilde{f}$ hat ein Maximum bei $1/2$ und sonst keine Extrema, also besitzen nur die Lösungen mit Startwerten zwischen 0 und $1/2$ einen Wendepunkt. Insbesondere besitzen Lösungen mit negativen Anfangswerten im Gegensatz zu obigen Betrachtungen gar keinen Wendepunkt.

Aufgabe 2

Vorgelegt sei die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ mit $f(x) = x - 1$, also

$$\dot{x}(t) = x(t) - 1,\ x(0) = x_0$$

Lösen Sie diese zum Anfangswert $x_0 = 2$ explizit mit der Methode der Separation der Variablen. Bestätigen Sie durch Einsetzen, dass die gefundene Lösung tatsächlich die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung erfüllt.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst eine Stammfunktion F von $1/f$. Die Lösung $x(t)$ erhält man dann nach Vorlesung, indem man die Gleichung $F(x(t)) - F(x(0)) = t$ für $t > 0$ nach t auflöst.

Lösung:

Eine Stammfunktion von $1/f$ ist bekanntlich $F(x) = \ln(x-1)$, jedenfalls für $x > 1$, denn

$$F'(x) = \frac{1}{x-1} = 1/f(x).$$

Wegen $x(0) = 2$ ist der Fall $x > 1$ auch derjenige, der hier interessiert. Wir könnten jetzt amit der qualitativen Analyse begründen, dass $x = 1$ ein stationärer Punkt ist und die Lösung zum Anfangswert $x(0) = 2$ stets größer als 1 ist. Es reicht jedoch auch, die Lösung zu berechnen und dies nachher mit einer Probe zu überprüfen.

Zu lösen ist also für $t > 0$ die Gleichung $F(x(t)) - F(x(0)) = t$, genauer mit $x(0) = 2$ folgt

$$\begin{aligned} \ln(x(t)-1) - \ln(x(0)-1) = t \ &\Leftrightarrow\ \ln(x(t)-1) = t \\ &\Leftrightarrow\ x(t) - 1 = \exp(t) \ \Leftrightarrow\ x(t) = 1 + \exp(t). \end{aligned}$$

Dies überprüfen wir durch Einsetzen: Es ist $x(0) = 1 + 1 = 2$ und

$$\dot{x}(t) = \exp(t) = 1 + \exp(t) - 1 = x(t) - 1,$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 3

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = (x(t) - 2)^2,\ x(0) = x_0$$

mittels Separation der Variablen für $x_0 = 3$ uns $x_0 = 1$. Welches Verhalten stellt sich für $t \to \infty$ ein ? Führen Sie ebenfalls eine qualitative Analyse der Gleichung wie in Aufgabe 1 durch und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Lösung

In der üblichen Notation ist hier $f(x) = (x-2)^2$, gesucht ist zunächst eine Stammfunktion von $1/f$. Diese finden wir als

$$F(x) = -\frac{1}{x-2}.$$

Zu lösen ist also nach der Methode der Separation der Variablen die Gleichung

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x(t)-2} - \left(-\frac{1}{x(0)-2}\right) = t \ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{x(t)-2} = \frac{1}{x(0)-2} - t \\ &\Leftrightarrow\ -\frac{1}{t - 1/(x(0)-2)} = x(t) - 2 \\ &\Leftrightarrow\ x(t) = 2 - \frac{1}{t - 1/(x(0)-2)} = 2 - \frac{x(0)-2}{(x(0)-2)t - 1}. \end{aligned}$$

Überprüfen wir die Richtigkeit der gefundenen Lösung, es ist

$$x(0) = 2 - \frac{x(0) - 2}{-1} = 2 + x(0) - 2 = x(0)$$

und

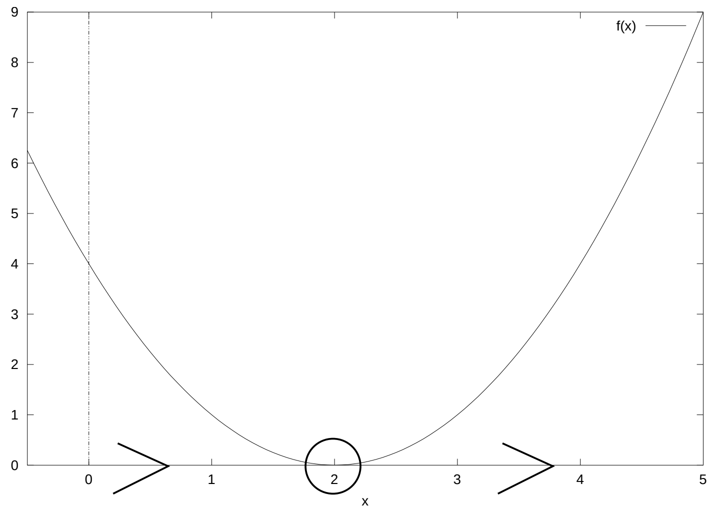
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\left(-\frac{x(0)-2}{((x(0)-2)t-1)^2} \cdot (x(0)-2)\right) = \left(\frac{x(0)-2}{((x(0)-2)t-1)}\right)^2 \\ &= (-(x(t)-2))^2 = (x(t)-2)^2.\end{aligned}$$

Zu den beiden Anfangsbedingungen gehören dann die Lösungen

$$\begin{aligned} x(0) = 1 \;\Rightarrow\; x(t) &= 2 - \frac{1-2}{(1-2)t-1} = 2 - \frac{1}{t+1}, \\ x(0) = 3 \;\Rightarrow\; x(t) &= 2 - \frac{3-2}{(3-2)t-1} = 2 - \frac{1}{t-1}. \end{aligned}$$

Die erste Lösung existiert für alle t und es gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = 2$. Die zu $x(0) = 3$ gehörige Lösung existiert hingegen nur für $t < 1$, es gilt $\lim_{t\to 1} x(t) = +\infty$.

Was ergibt die qualitative Analyse ? Der einzige stationäre Punkt ist $x = 2$. Falls $x(0) < 2$, so ist die zugehörige Lösung wegen $f(x) > 0$ monoton steigend und es gilt $\lim_{t\to\infty} = 2$. Für $x(0) > 2$ ist die zugehörige Lösung ebenfalls monoton steigend und läuft daher in endlicher oder unendlicher Zeit gegen $+\infty$. Keine Lösungen besitzt Wendepunkte, da f kein Extremum ausser am stationären Punkt der Gleichung hat, vgl. folgende Abbildung



Diese Ergebnisse stehen also im Einklang mit den expliziten Lösungen. Man erkennt, wie hilfreich die qualitative Analyse sein kann, wenn man sich beispielsweise ledglich für das Langzeitverhalten interessiert.