

Lösungshinweise zur 11. Übung

<http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie>

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe wollen wir das folgende Additionstheorem beweisen

$$\sin(t+s) = \sin(t)\cos(s) + \sin(s)\cos(t) \text{ für } s, t \in \mathbb{R}.$$

Dazu definieren wir bei festem $s \in \mathbb{R}$ die Funktionen

$$x_1(t) := \sin(t+s) \text{ und } x_2(t) := \sin(t)\cos(s) + \sin(s)\cos(t).$$

Zeigen Sie zunächst, dass x_1 und x_2 beide die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x}(t) = -x(t)$$

zu denselben Anfangsdaten $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ lösen. Folgern Sie dann mit Hilfe der eindeutigen Lösbarkeit der zugehörigen Anfangswertaufgabe obiges Additionstheorem.

Lösung:

Es gilt

$$\dot{x}_1(t) = \cos(t+s), \quad \ddot{x}_1(t) = -\sin(t+s) = -x_1(t)$$

sowie

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \cos(t)\cos(s) - \sin(s)\sin(t) \\ \ddot{x}_2(t) &= -\sin(t)\cos(s) - \sin(s)\cos(t) = -x_2(t). \end{aligned}$$

Also erfüllen beide Funktionen die Differentialgleichung. Falls die Anfangsbedingungen übereinstimmen, so folgt aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung die Behauptung. Es ist

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \sin(0+s) = \sin(s) = \sin(0)\cos(s) + \sin(s)\cos(0) = x_2(0), \\ \dot{x}_1(0) &= \cos(0+s) = \cos(s) = \cos(0)\cos(s) - \sin(s)\sin(0) = \dot{x}_2(0), \end{aligned}$$

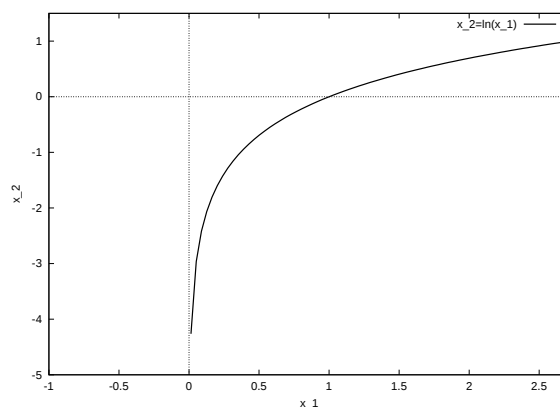
also folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$:

- (i) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < \exp(1), x_2 = \ln(x_1)\}$,

Lösung:



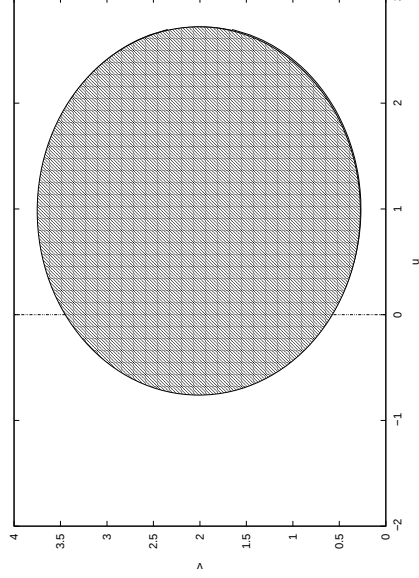
(ii) $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u - 1)^2 + (v - 2)^2 \leq 3\}$,

Lösung:

Obige Menge ist eine Kreisfläche mit Mittelpunkt $(u = 1, v = 2)$ und Radius $\sqrt{3}$. Falls man die allgemeine Kreisgleichung nicht kennt, kann man sich das wie folgt veranschaulichen: wir berechnen zunächst die Punkte für die Gleichheit gilt, sozusagen den Rand der Menge

$$\begin{aligned} (u - 1)^2 + (v - 2)^2 = 3 &\Leftrightarrow (v - 2)^2 = 3 - (u - 1)^2 \\ &\Leftrightarrow v - 2 = \pm \sqrt{3 - (u - 1)^2} \\ &\Leftrightarrow v = 2 \pm \sqrt{3 - (u - 1)^2} \\ &\Leftrightarrow v = 2 \pm \sqrt{3 - (u^2 - 2u + 1)} = 2 \pm \sqrt{-u^2 + 2u + 2} \end{aligned}$$

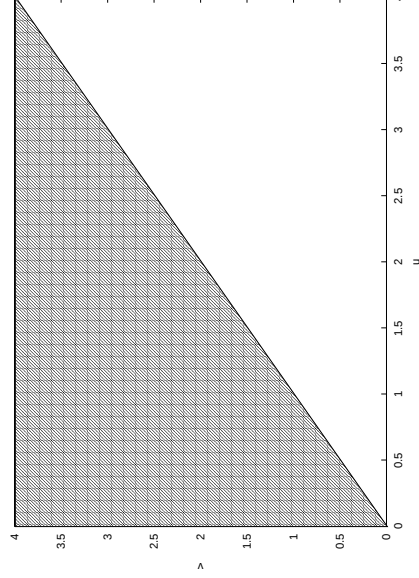
Die beiden Funktion tragen wir nun in folgendes Diagramm ein und erhalten den Kreis als Rand der Menge, wegen der $\leq$ -Beziehung ist die gesuchte Menge die gesamte Kreisfläche:



(iii) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 4\}$,

Lösung:

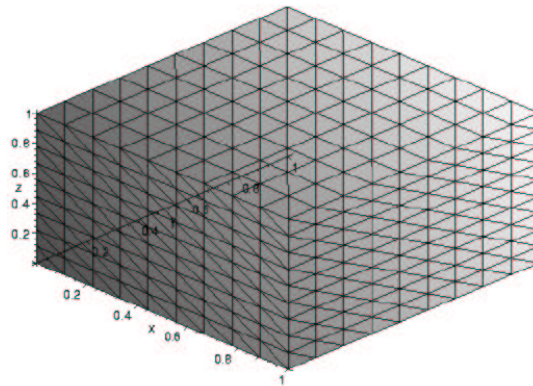
Die Beziehung $0 < a \leq b$ bedeutet, dass die gesuchte Menge im ersten Quadranten liegt, und zwar oberhalb der Winkelhalbierenden. Die Menge wird durch die Gerade $b = 4$ begrenzt, es ergibt sich also folgendes Dreieck:



- (iv) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$,

Lösung:

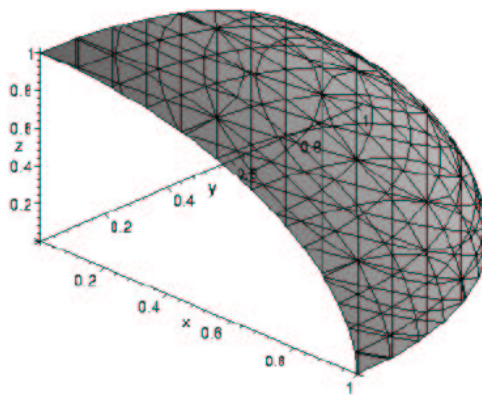
Die Menge ist offenbar ein Würfel mit Kantenlänge 1, der liegt und im Ursprung angelegt ist.



- (v) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Lösung:

Die Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ist diejenige für einen Kugel im $\mathbb{R}^3$. Da jedoch die Zusatzbedingung $x, y, z > 0$ gefordert ist, besteht die Menge nur aus dem zugehörigen Achtel der Kugel.



Aufgabe 3

- (i) Stellen Sie die folgenden Funktionen durch Höhenlinien dar, indem Sie die Mengen

$$N(c) := \{(x, y) : f(x, y) = c\}$$

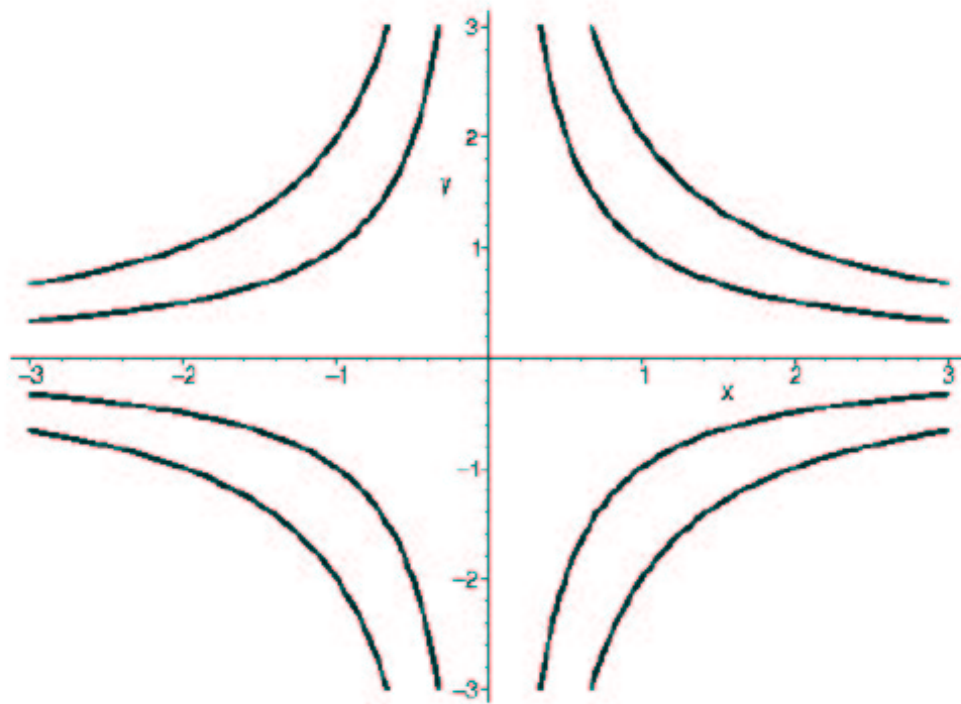
für $c = -2, -1, 0, 1, 2$ in ein Schaubild zeichnen.

(a) $f(x, y) = xy,$

(b) $f(x, y) = 4x - y^2.$

Lösung:

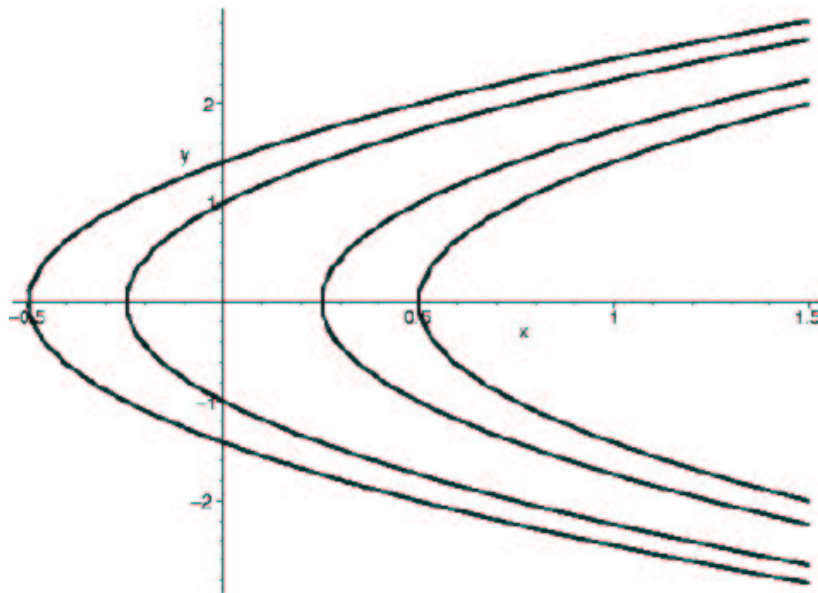
- (a) Aus $f(x, y) = c$ folgt $y = c/x$, wir zeichnen also die Funktionen $y = -2/x$, $y = -1/x$ usw. in eine Diagramm. Die Höhenlinie zu $c = 0$ ist die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ oder } y = 0\}$, also die x - und die y -Achse.



(b) Zu lösen ist also die Gleichung $4x - y^2 = c$, was

$$y = \pm\sqrt{4x - c}$$

impliziert. Zeichnen wir die Funktion zu den entsprechenden Werten von c in ein Diagramm, so ergibt sich folgende Höhenkarte:



(ii) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \ln(x^2 + y^2 - 5)$$

(a) Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich an.

Lösung:

Die Funktion ist dort definiert, wo $x^2 + y^2 - 5 > 0$ ist. Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$

$x^2 + y^2 \leq 5$ ist ein Kreis mit dem Ursprung als Mittelpunkt und Radius $\sqrt{5}$. Ausserhalb dieses Kreises ist die Funktion definiert, es gilt also

$$\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 5\}$$

Auf $\mathcal{D}(f)$ nimmt das Argument des $\ln$ alle Werte zwischen 0 und $+\infty$ an und damit ist der Wertebereich von f ganz $\mathbb{R}$.

- (b) Berechnen Sie alle Nullstellen von f .

Lösung:

Die Nullstellenmenge von f berechnet sich aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 5 = 1.$$

Bezeichnen wir diese mit $\mathcal{N}(f)$, so gilt

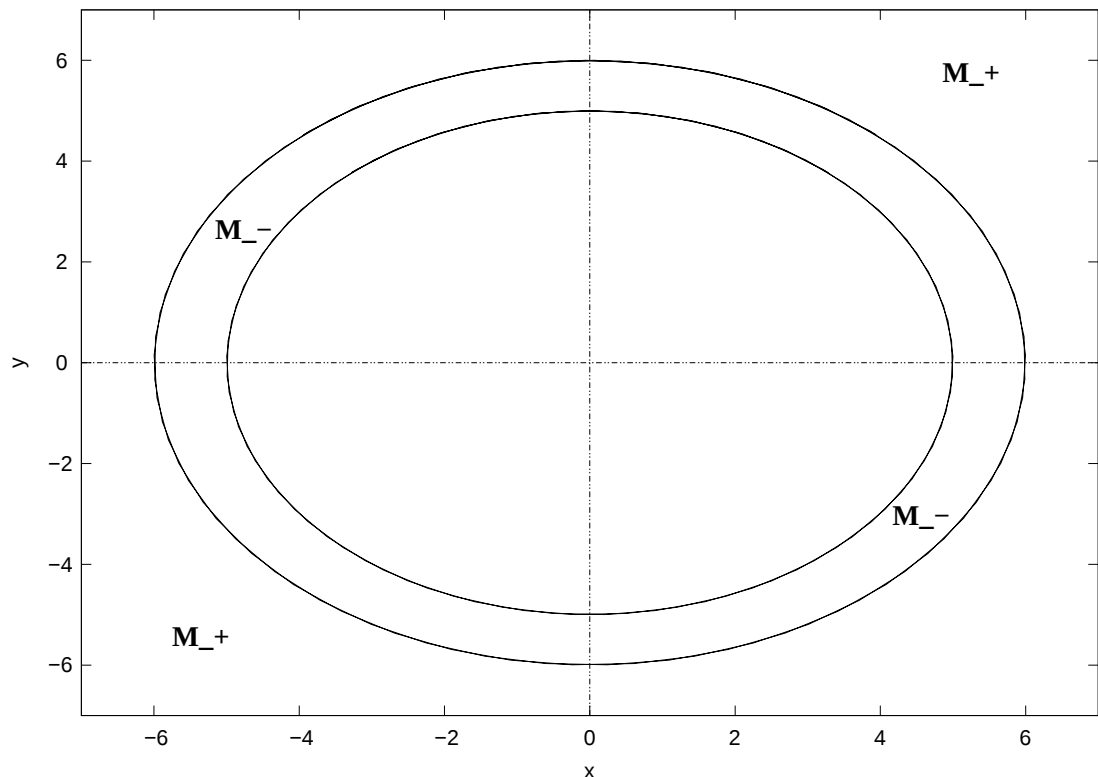
$$\mathcal{N}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 6\},$$

was ein Kreis mit dem Ursprung als Mittelpunkt und Radius $\sqrt{6}$ ist.

- (c) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge in der (x, y) -Ebene. Tragen Sie ebenfalls die Mengen $M_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\}$ und $M_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) < 0\}$ ein.

Lösung:

Es ist $M_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 6\}$ und $M_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5 < x^2 + y^2 < 6\}$, vgl. folgende Zeichnung



Im Inneren des kleinen Kreises ist die Funktion nicht definiert, im Kreisring dann negativ und ausserhalb des grösseren Kreis ist f positiv.