MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
31.1.2003

Lösungshinweise zur 12. Übung

http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils den Gradienten

(i) $f(x,y) = \exp(2x) + y$, (ii) $g(x,y) = \sin(xy) + xy^2$, (iii) $h(x,y,z) = \ln(x^2 + 2z\exp(y))$.

Lösung:

(i) Der Gradient von f ist der Vektor der partiellen Ableitungen. Berechnen wir zunächst die partielle Ableitung nach x. Dazu betrachten wir y als festen Parameter und differenzieren die Funktion nach x. Mathematisch gesprochen definieren wir also $g(x) = f(x,y)$ und berechnen $g'(x)$. Es gilt

$$(g'(x)) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2\exp(2x)$$

Für die partielle Ableitung nach y gilt dann, indem wir x festhalten und anch y differenzieren:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 1.$$

Damit folgt nun für den Gradienten

$$\text{grad } f(x,y) = (\frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)) = (2\exp(2x), 1).$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) &= y\cos(xy) + y^2 \\ \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) &= x\cos(xy) + 2xy, \end{aligned}$$

also

$$\text{grad } g(x,y) = (\frac{\partial}{\partial x} g(x,y), \frac{\partial}{\partial g} f(x,y)) = (y\cos(xy) + y^2, x\cos(xy) + 2xy).$$

(iii) Für die partiellen Ableitungen gilt jeweils

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} h(x,y,z) &= \frac{2x}{x^2 + 2z\exp(y)}, \\ \frac{\partial}{\partial y} h(x,y,z) &= \frac{2z\exp(y)}{x^2 + 2z\exp(y)} \\ \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial z} h(x,y,z) &= \frac{2\exp(y)}{x^2 + 2z\exp(y)}. \end{aligned}$$

Damit folgt für den Gradienten

$$\text{grad } h(x,y,z) = (\frac{2x}{x^2 + 2z\exp(y)}, \frac{2z\exp(y)}{x^2 + 2z\exp(y)}, \frac{2\exp(y)}{x^2 + 2z\exp(y)}).$$

Aufgabe 2

(i) Bestimmen Sie Gradient und maximalen Definitionsbereich in der (u,v)-Ebene von

$$g(u,v) = \frac{\ln(u^2+v+1)}{u+7}.$$

Lösung:

Die Funktion ist dort nicht definiert, wo der Nenner verschwindet, also für $u = -7$. Desweiteren muss das Argument des ln positiv sein, also $u^2+v+1 > 0$. Insgesamt folgt

$$\mathcal{D}(g) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v \neq -7, u^2+v+1 > 0\}.$$

Auf $\mathcal{D}(g)$ kann man auch den Gradienten berechnen, es gilt für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} g(u,v) &= \frac{(u+7)\frac{2u}{u^2+v+1} - \ln(u^2+v+1)}{(u+7)^2} \\ \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} g(u,v) &= \frac{1}{(u+7)(u^2+v+1)}. \end{aligned}$$

Für den Gradienten folgt damit

$$\text{grad } g(u,v) = \left(\frac{2u}{(u+7)(u^2+v+1)} - \frac{\ln(u^2+v+1)}{(u+7)^2}, \frac{1}{(u+7)(u^2+v+1)} \right).$$

(ii) Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = x\exp(xy) - y^2$.

- Berechnen Sie den Gradienten von f, also grad $f(x,y)$.

  Lösung:

  Es gilt

  $$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \exp(xy) + xy\exp(xy) \\ \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= x^2\exp(xy) - 2y. \end{aligned}$$

  Damit berechnet sich der Gradient als

  $$\text{grad} f(x,y) = \big((1+xy)\exp(xy), x^2\exp(xy) - 2y\big).$$

- Berechnen Sie alle Punkte $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, welche $\text{grad} f(\bar{x},\bar{y}) = 0$ erfüllen.

  Lösung:

  Damit der Gradient verschwindet muss jeder seiner Einträge gleich Null sein. Demnach muss gelten

  $$(1+\bar{x}\bar{y})\exp(\bar{x}\bar{y}) = 0 \text{ und } \bar{x}^2\exp(\bar{x}\bar{y}) - 2\bar{y} = 0$$

  Dies sind zwei nichtlineare Gleichungen mit zwei Unbekannten, aus der ersten Gleichung folgt wegen $\exp(\bar{x}\bar{y}) > 0$ die Tatsache, dass

  $$\bar{y} = -1/\bar{x}$$

  gelten muss. Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so folgt

  $$\bar{x}^2\exp(-1) + 2/\bar{x} = 0,$$

  woraus für $\bar{x}$ die Beziehung

  $$\bar{x} = (-2\exp(1))^{1/3} \sim 1.758$$

  folgt. Für $\bar{y}$ folgt dann $\bar{y} = 1/\bar{x} \sim 0.569$.

- Rechnen Sie nach, dass $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y)$ gilt.

  Lösung:

  Differenzieren wir die partielle Ableitung nach x, die wir in (i) berechnet haben, nach y, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\exp(xy) + xy\exp(xy)\right)\\ &= x\exp(xy) + x\exp(xy) + x^2 y\exp(xy) = (2x + x^2 y)\exp(xy)\end{aligned}$$

  Analog gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\exp(xy) - 2y\right)\\ &= 2x\exp(xy) + yx^2\exp(xy)\\ &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y),\end{aligned}$$

  was zu beweisen war.

Aufgabe 3

Bei der Auswertung von n experimentell gewonnenen Datenpaaren (x_i, y_i) für $1 \leq i \leq n$ liegt häufig näherungsweise ein linearer Zusammenhang vor. Man möchte die Daten bestmöglich durch eine lineare Funktion $y(x) = ax + b$ zu approximieren; diese Gerade wird Regressionsgerade genannt. Zu diesem Zweck versucht man die quadratische Abweichung der Daten von der Regressionsgerade durch die Wahl von a und b zu minimieren.

In dieser Aufgabe wollen wir die Formel für die lineare Regression herleiten. Sei dazu

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$$

die quadratische Abweichung, die es zu minimieren gilt. Bekanntlich verschwindet der Gradient am Minimum, es gilt also für die gesuchten a und b die Gleichung

$$\mathrm{grad} f(a,b) := \left(\frac{\partial}{\partial a} f(a,b), \frac{\partial}{\partial b} f(a,b)\right) = (0,0).$$

Beweisen Sie, dass dann a und b wie folgt gegeben sind:

$$\begin{aligned}a &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},\\ b &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - a\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right).\end{aligned}$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor

(i) Berechnen Sie $\mathrm{grad} f(a,b)$.

(ii) Lösen Sie die Gleichung $\mathrm{grad} f(a,b) = (0,0)$ nach a und b auf.

Lösung:

Zunächst berechnen wir $\frac{\partial}{\partial b}f(a,b)$. Dazu halten wir in $f(a,b)$ die Variable a fest und differenzieren nach b. Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial b}f(a,b) &= \frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(ax_i+b)\right)^2 \quad \text{(nach Definition von } f\text{)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial b}\left(y_i-(ax_i+b)\right)^2 \quad \text{(nach Summenregel)}\\
&= \sum_{i=1} 2\left(y_i-(ax_i+b)\right)\frac{\partial}{\partial b}\left(y_i-(ax_i+b)\right) \quad \text{(nach Kettenregel)}\\
&= -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(ax_i+b)\right)\\
&= -2\left(\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}b\right)\\
&= 2\left(nb+a\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\right)
\end{aligned}$$

Wir dividieren nun die Gleichung $\frac{\partial}{\partial b}f(a,b)=0$ durch $2n$ und erhalten

$$b+\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=0.$$

Durch Berechnung von $\frac{\partial}{\partial a}f(a,b)$ gelangt man analog zu

$$\frac{\partial}{\partial a}f(a,b)=2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(ax_i+b)\right)\cdot x_i=2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-2a\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2b\sum_{i=1}^{n}x_i$$

und damit durch Divison von -2 zu der Gleichung

$$\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0.$$

Wir haben also zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten a und b. Auflösen der ersten Gleichung nach b und Einsetzen des Ausdrucks in die zweite Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-a\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0\\
\Leftrightarrow\quad &a\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right).
\end{aligned}$$

Demnach lautet die Lösung für a

$$a=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}.$$

Daraus lässt sich nun b berechnen als

$$b=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)-a\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right),$$

womit die Formeln bewiesen wären.