MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
3.2.2003

Lösungshinweise zur 13. Übung

`http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie`

Aufgabe 1

Bei Brillenschötchen (*Biscutella laevigata*) wurden Anzahl der Stengelblätter am Hauptsproß und Sproßhöhe gemessen. Dabei ergab sich folgende Tabelle:

Anzahl Stengelblätter	Sproßhöhe [cm]
3	7
5	13
6	14
8	17
11	20
14	25

Berechnen Sie mit Hilfe der Formeln aus Aufgabe 3 der 12. Übung die lineare Regressionsgerade $y = ax + b$ und tragen diese zusammen mit den Messdaten in ein Koordatensystem ein.

Lösung:

Sei x_i die Anzahl der Stengelblätter und y_i die Sproßhöhe in cm.Wir berechnen

$$\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 47/6 = 7.833333333, \qquad \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} y_i = 96/6 = 16$$

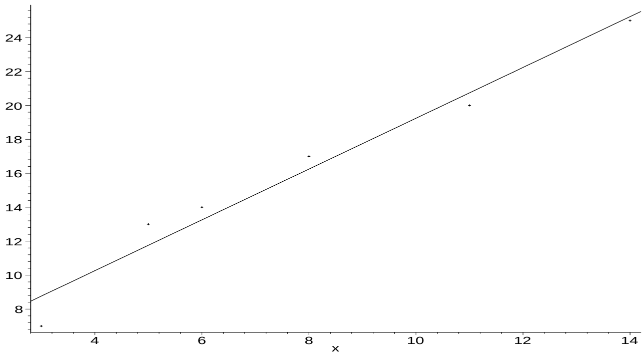
$$\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 451/6 = 75.16666667, \qquad \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 876/6 = 146$$

Darus erhalten wir a und b wie folgt:

$$a = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = 744/497 = 1.496981891$$

$$b = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - a\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 2124/497 = 4.273641851$$

Damit ergibt sich die Regressionsgerade zu $y(x) = 1.496981891\, x + 4.273641851$. Zusammen mit den Messdaten ergibt sich folgendes Bild:



Aufgabe 2

(i) Gegeben sei die Funktion $h(x, y) := x^2 + 2x + y^2 - 4y, x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass $h(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0$ gilt.

Lösung:

Es gilt

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - c^2.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$-2ax = 2x \;\Rightarrow\; a = -1, \quad \text{und} \quad -2by = -4y \;\Rightarrow\; b = 2.$$

Weiter muss gelten

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0, \;\Rightarrow\; c^2 = a^2 + b^2 = 5, \;\Rightarrow\; c = \pm\sqrt{5}.$$

(b) Zeichnen Sie $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0\}$.

Lösung:

Mit dem Wissen aus Teil (a) ist klar, dass es sich bei M um einen Kreis mit Mittelpunkt $(a, b) = (-1, 2)$ und Radius $|c| = \sqrt{5}$ handelt.

(c) Gibt es ein $(x, y) \in M$ mit $\operatorname{grad} h(x, y) = 0$?

Lösung:

Berechnen wir zunächst den Gradienten:

$$\operatorname{grad} h(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h(x, y), \frac{\partial}{\partial y} h(x, y)\right) = (2x + 2, 2y - 4).$$

Dieser ist genau dann gleich Null, wenn beide Einträge verschwinden, also

$$2x + 2 = 0 \text{ und } 2y - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1 \text{ und } y = 2.$$

Es ist $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$, also folgt $(x, y) \notin M$. Genauer ist die Nullstelle des Gradienten der Mittelpunkt des Kreises, der durch M gegeben ist.

(ii) Berechnen Sie die Hessematrix der Funktion $f(x, y, z) := x \cos(xy) + z$.

Lösung:

Die Hessematrix ist die Matrix der zweiten Ableitunge, berechnen wir also zunächst den Gradienten:

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = (\cos(xy) - xy \sin(xy), -x^2 \sin(xy), 1)$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} &= -y \sin(xy) - y \sin(xy) - xy^2 \cos(xy) = -2y \sin(xy) - xy^2 \cos(xy) \\
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= -2x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy) \\
\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} &= -x \sin(xy) - x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} &= -x^3 \cos(xy).
\end{aligned}$$

Alle anderen partielle Ableitungen sind Null, damit ergibt sich als Hessematrix

$$\begin{pmatrix} -2y \sin(xy) - xy^2 \cos(xy) & -2x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy) & 0 \\ -2x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy) & -x^3 \cos(xy) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Die Gleichung

$$\ln\left((x-1)(2y+1)\right) = 0, \text{ für } x > 1, y > -\frac{1}{2}$$

definiert zwei Funktionen $x(y)$ bzw. $y(x)$ in impliziter Weise.

(i) Geben Sie diese Funktionen explizit an.

Lösung:

Es gilt

$$\ln\left((x-1)(2y+1)\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(2y+1) = \exp(0) = 1$$

Lösen wir diese Gleichung nach y auf, so folgt

$$2y+1 = \frac{1}{x-1} \;\Rightarrow\; y = y(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} - 1) = -\frac{1}{2}\frac{x-2}{x-1}.$$

Umgekehrt ergibt sich

$$x-1 = \frac{1}{2y+1} \;\Rightarrow\; x = x(y) = \frac{1}{2y+1} + 1 = \frac{2y+2}{2y+1}.$$

(ii) Berechnen Sie einerseits $y'(x)$ durch Differenzieren obiger Gleichung,

Lösung:

Wir differenzieren die Gleichung nach x, es ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}\left(\ln\left((x-1)(2y(x)+1)\right)\right) = \frac{1}{(x-1)(2y(x)+1)} \cdot (2y(x)+1)\cdot 2y'(x) \\ &= \frac{1}{(x-1)(2y(x)+1)} \cdot \left((2y(x)+1) + (x-1)2y'(x)\right) = \frac{1}{(x-1)} + \frac{2y'(x)}{2y(x)+1} \end{aligned}$$

Lösen wir dies nach $y'(x)$ auf, so folgt

$$y'(x) = \frac{y(x)+1/2}{1-x}.$$

(iii) andererseits indem Sie die explizit gefundene Lösung aus (i) differenzieren.

Lösung:

Anhand der explizit bekannten Lösung aus (i)

$$y(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} - 1)$$

können wir das Ergebnisaus (ii) verifizieren:

$$y'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Setzen wir in der Formel aus (ii), die explizite Darstellung von $y(x)$ ein, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{y(x)+1/2}{1-x} &= \frac{(\frac{1}{x-1}-1)/2 + 1/2}{1-x} = \frac{1}{2}\frac{1/(x-1)}{1-x} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Üblicherweise kann man eine implizite Gleichung nicht direkt auflösen, trotzdem kann man eine Gleichung für die Ableitung der implizit gegebenen Funktion wie in (ii) herleiten und so Erkenntnisse über die Funktion selber gewinnen.