

Lösungshinweise zur 14. Übung

<http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie>

Aufgabe 1

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 1. und 2. Grades für folgende Funktionen an der Stelle $\bar{x}$.

$$(i) \quad f(x) = x^2 + 1, \quad \bar{x} = 0 \qquad (ii) \quad f(x) = x \exp(-x^2), \quad \bar{x} = 1$$

Lösung:

(i) Es ist $f(0) = 1$ und $f'(x) = 2x$ sowie $f''(x) = 2$. Damit folgt für die Taylorpolynome

$$p_1(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) = 1 + x \cdot 0 = 1$$

und

$$p_2(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^2 f''(\bar{x}) = 1 + 0 + \frac{1}{2}x^2 \cdot 2 = 1 + x^2.$$

Man beachte, dass $p_2 = f$. Dies ist klar, da p_2 das quadratische Polynom ist, welches f in der Nähe von $\bar{x}$ am besten approximiert. Da f bereits ein quadratisches Polynom ist, muss demnach $p_2 = f$ sein.

(ii) Es ist

$$f'(x) = \exp(-x^2) - 2x^2 \exp(-x^2) = (1 - 2x^2) \exp(-x^2)$$

und

$$f''(x) = -4x \exp(-x^2) + (1 - 2x^2) \exp(-x^2) \cdot (-2x) = (-6x + 4x^3) \exp(-x^2).$$

Also gilt

$$f(\bar{x}) = f(1) = \exp(-1), \quad f'(1) = -\exp(-1), \quad f''(1) = -2\exp(-1).$$

Damit folgt für die Taylorpolynome

$$p_1(x) = \exp(-1) - (x - 1) \exp(-1) = (2 - x) \exp(-1)$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \exp(-1) - (x - 1) \exp(-1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2 \exp(-1) \cdot (-2) \\ &= (2 - x - (x - 1)^2) \exp(-1) \\ &= (2 - x - x^2 + 2x - 1) \exp(-x) = (1 + x - x^2) \exp(-1). \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Taylor-Polynome (um $x_0 = 0$) von $f(x) = \sin(x)$ der Ordnung $n = 0, 1, 2$ und zeichnen Sie diese zusammen mit $\sin(x)$ für $-\pi \leq x \leq \pi$ in ein Koordinatensystem.

Lösung:

Es ist $f'(x) = \cos(x)$ und $f''(x) = -\sin(x)$. Damit folgt

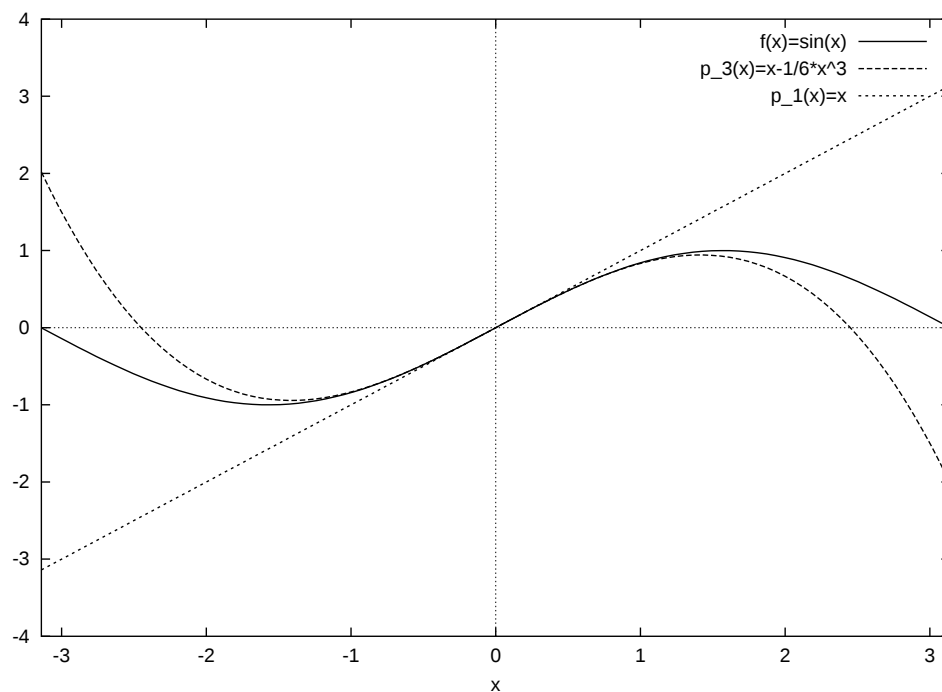
$$p_0(x) = f(0) = 0$$

$$p_1(x) = f(0) + xf'(0) = x$$

$$p_2(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2f''(0) = x.$$

Die nächste Approximation wäre

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{1}{6}x^3f'''(0) = x - \frac{1}{6}x^3.$$



Man erkennt an der Abbildung, wie sich die Taylorpolynome immer besser der Funktion anschmiegen.

Aufgabe 3

In einem Experiment haben Sie die Größe einer Bakterienkultur zu verschiedenen Zeitpunkten bestimmt:

Zeit t	1	2	4	5
Anzahl der Bakterien $y(t)$	6	9	12	15

Berechnen Sie die Regressionsgerade und tragen Sie diese gemeinsam mit den Daten in ein Koordinatensystem ein. Wie lautet demnach der geschätzte Wert bei $t = 3$?

Lösung:

Wir suchen also die Regressionsgerade $y = at + b$, dazu berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 t_i &= \frac{1+2+4+5}{4} = \frac{12}{4} = 3, \\ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 y_i &= \frac{6+9+12+15}{4} = \frac{42}{4} = 10.5, \\ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 t_i^2 &= \frac{1^2+2^2+4^2+5^2}{4} = \frac{1+4+16+25}{4} = \frac{46}{4} = \frac{23}{2} = 11.5 \\ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 t_i y_i &= \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 9 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 15}{4} = \frac{6+18+48+75}{4} = \frac{147}{4} = 36.75.\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir a und b wie folgt:

$$\begin{aligned}a &= \frac{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 t_i y_i - \left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 t_i\right) \left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 y_i\right)}{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 t_i^2 - \left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 t_i\right)^2} = \frac{36.75 - 3 \cdot 10.5}{11.5 - 3^2} = \frac{5.25}{2.5} = 2.1 \\ b &= \left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 y_i\right) - a \left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 t_i\right) = 10.5 - 3a = 10.5 - 6.3 = 4.2.\end{aligned}$$

Demnach lautet die Regressionsgerade

$$y(t) = 2.1 t + 4.1$$

und der geschätzte Werte für $t = 3$ liegt bei

$$y(3) = 6.3 + 4.2 = 10.5.$$

Die zugehörige Skizze sei jedem selbst überlassen.