

Lösungshinweise zur 2. Übung

<http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie>

Aufgabe 1

Gegeben seien die Intervalle $I_1 := [0, 2)$ und $I_2 := \{t \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\pi} \leq t\}$ sowie die Menge $M = \{t \in \mathbb{Q} \mid t < 1\}$

- (i) Zeichnen Sie die Intervalle I_1 und I_2 qualitativ auf einem Zahlenstrahl ein. Geben Sie aus der Menge $\{0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2+\pi}, \frac{\pi}{2}, 2, \pi^2, -\pi\}$ diejenigen Zahlen an, die Element von I_1 und zugleich Element von I_2 sind. Mit $I_1 \cap I_2$ sei die Schnittmenge von I_1 und I_2 bezeichnet, geben Sie diese als Intervall an.

Lösung:

Das Intervall I_1 kann man auch wie folgt schreiben:

$$I_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 2\},$$

also ist I_1 die Menge aller $t \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $0 \leq t < 2$. Die Schnittmenge $I_1 \cap I_2$ ist die Menge aller $t \in \mathbb{R}$, die die beiden Eigenschaften

$$0 \leq t < 2 \text{ und } \frac{1}{\pi} \leq t$$

gleichzeitig erfüllen. Dies ist wegen $1/\pi > 0$ genau für die $t \in \mathbb{R}$ der Fall, für die

$$\frac{1}{\pi} \leq t < 2$$

gilt, also

$$I_1 \cap I_2 = \{t \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\pi} \leq t < 2\} = [\frac{1}{\pi}, 2).$$

Weiter gilt

$$-\pi < 0 < \frac{1}{2+\pi} < \frac{1}{\pi} < \frac{\pi}{2} < 2 < \pi^2,$$

also

$$\frac{1}{\pi}, \frac{\pi}{2} \in I_1 \cap I_2, \quad 0, \frac{1}{2+\pi}, 2, \pi^2 \notin I_1 \cap I_2.$$

- (ii) Berechnen Sie $I_1 \cap M$, $I_2 \cap M$ und $I_1 \cap I_2 \cap M$.

Lösung:

Es gilt $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, also bestehen alle folgenden Mengen nur aus rationalen Zahlen. Analog zu (i) folgt

$$I_1 \cap M = \{t \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq t < 1\},$$

$$I_2 \cap M = \{t \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{\pi} \leq t < 1\},$$

$$I_1 \cap I_2 \cap M = \{t \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{\pi} \leq t < 1\}.$$

Bei den letzten beiden Mengen gilt sogar $1/\pi < t$, da $1/\pi \notin \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe betrachten wir die in der Vorlesung erklärten Enzym-Substrat-Komplexe.

- (i) Ein Enzym hat $N = 5$ Bindungsstellen. Auf wie viele verschiedene Weisen können $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ Bindestellen besetzt werden? Fertigen Sie wie in der Vorlesung ein schematisches Bild der verschiedenen Enzym-Substrat-Komplexe an.

Lösung:

Nach Vorlesung berechnet sich die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, i Bindungsstellen bei einem Enzym mit N Bindungsstellen zu besetzen gemäß

$$\binom{N}{i} = \frac{N!}{i! (N-i)!}.$$

In dieser Aufgabe gilt $N = 5$ und daher

$$\text{Anzahl der Möglichkeiten, 0 Bindestellen zu besetzen} = \binom{5}{0} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} = \frac{5!}{5!} = 1$$

$$\text{Anzahl der Möglichkeiten, 1 Bindestelle zu besetzen} = \binom{5}{1} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \frac{5!}{4!} = 5$$

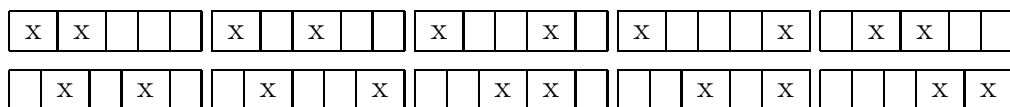
$$\text{Anzahl der Möglichkeiten, 2 Bindestellen zu besetzen} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$\text{Anzahl der Möglichkeiten, 3 Bindestellen zu besetzen} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$\text{Anzahl der Möglichkeiten, 4 Bindestellen zu besetzen} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \frac{5!}{4!} = 5$$

$$\text{Anzahl der Möglichkeiten, 5 Bindestellen zu besetzen} = \binom{5}{5} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} = \frac{5!}{5!} = 1$$

Wir geben hier stellvertretend für die anderen Fälle nur die verschiedenen Komplexe für $i = 2$ an:



- (ii) Wie viele verschiedene Komplexe kann ein Enzym mit $N = 2, 3, 4, 5$ Bindestellen insgesamt bilden? Finden Sie eine allgemeingültige Formel für ein allgemeines N .

Lösung:

In dieser Teilaufgabe geht es darum, alle Möglichkeiten zu finden, die ein Enzym mit N Bindestellen bilden kann. Ein Enzym mit $N = 2$ kann $i = 0, 1$ oder 2 Bindestellen besetzt haben, dafür gibt es jeweils $\binom{2}{i}$ viele Möglichkeiten. Insgesamt also

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Für $N = 3$ gilt

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8.$$

Analog berechnen wir die Werte für $N = 4$ zu 16 und für $N = 5$ zu 32. Betrachten wir die einzelnen Ergebnisse, so fällt auf, dass es sich um Zweierpotenzen handelt ($4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4, 64 = 2^5, \dots$). Wir vermuten daher, dass die Gesamtanzahl der verschiedenen Komplexe, die ein Enzym der Länge N bilden kann, 2^N beträgt. Diese Aussage wird in (iii) dann formal bewiesen.

- (iii) Beweisen Sie die Gültigkeit der in (ii) gefundenen Formel mit Hilfe der allgemeinen binomischen Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Lösung:

Für allgemeines N berechnet sich die Anzahl der verschiedenen Komplexe eines Enzyms mit Länge N berechnet zu

$$\binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \dots + \binom{N}{N-1} + \binom{N}{N} = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i}.$$

Benutzen wir die allgemeine binomische Formel mit $a = 1$ und $b = 1$, so ergibt sich

$$\sum_{i=0}^N \binom{N}{i} = 2^N.$$

Aufgabe 3

Eine Zelle wird in eine Flüssigkeit getaucht. Sie nimmt in jeder Minute N Partikel aus der Flüssigkeit auf und gibt 20% der jeweils vorhandenen Partikel ab. Sei die Anzahl der von der Zelle nach n Minuten aufgenommenen Partikel mit N_n bezeichnet.

- (i) Stellen Sie eine allgemeine Formel zur Berechnung der N_n auf. Benutzen Sie dabei das Summenzeichen.

Lösung:

An Anfang hat die Zelle 0 Partikel aufgenommen, demnach gilt $N_0 = 0$. Nach einer Minute hat die Zelle N Partikel aufgenommen und 0 abgegeben, also $N_1 = N$. Nach zwei Minuten sind N Partikel dazu gekommen und $0.2N_1$ abgegeben worden, es folgt

$$N_2 = N_1 + N - 0.2N_1 = 0.8N_1 + N = 0.8N + N.$$

Nach drei Minuten ist dann

$$N_3 = N_2 + N - 0.2N_2 = 0.8N_2 + N = 0.8(0.8N + N) + N = 0.8^2N + 0.8N + N$$

Nach vier Minuten folgt

$$\begin{aligned} N_4 &= N_3 + N - 0.2N_3 = 0.8N_3 + N = 0.8(0.8^2N + 0.8N + N) + N \\ &= 0.8^3N + 0.8^2N + 0.8N + N. \end{aligned}$$

Für allgemeines n gilt dann offenbar

$$N_{n+1} = 0.8^n N + 0.8^{n-1} N + \dots + 0.8N + N = \sum_{k=0}^n 0.8^k N.$$

Dies kann man auch per vollständiger Induktion beweisen !

- (ii) Vereinfachen Sie die in (i) hergeleitete Formel, indem Sie die für $q \neq 1$ gültige geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^n q^k := 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

verwenden.

Lösung:

Wir wenden die Formel mit $q = 0.8$ an und erhalten

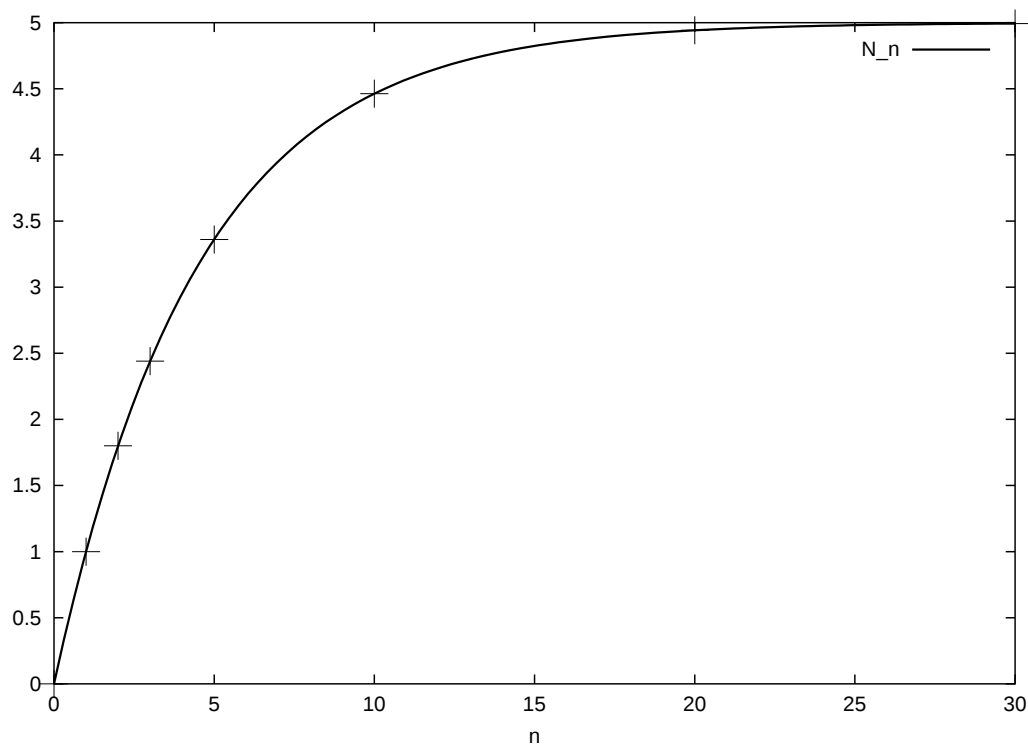
$$N_{n+1} = N \sum_{k=0}^n q^k = N \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = N \frac{1 - 0.8^{n+1}}{0.2} = 5N(1 - 0.8^{n+1}).$$

- (iii) Berechnen Sie $N_2, N_3, N_5, N_{10}, N_{20}$ und N_{30} . Zeichnen Sie die Funktion $n \rightarrow N_n$ für $0 \leq n \leq 30$ mitsamt einer kontinuierlichen Approximation in ein Diagramm ein. Was fällt Ihnen bezüglich des Langzeitverhaltens auf? Können Sie das analytisch begründen?

Lösung:

Es gilt

n	2	3	5	10	20	30
N_n	$1.8 N$	$2.44 N$	$3.36160 N$	$4.463129088 N$	$4.942353925 N$	$4.9938103 N$



Für $n \rightarrow \infty$ gilt wegen $q = 0.8 < 1$: $q^{n+1} \rightarrow 0$, also folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n = N \frac{1 - 0}{0.2} = 5N.$$

Auf lange Sicht nimmt die Zelle demnach $5N$ Partikel auf, es stellt sich also ein Gleichgewicht ein.