MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
8.11.2002

Lösungshinweise zur 3. Übung

http://www.mi.uni-koeln.de/∼mkurth/biologie

Aufgabe 1

Puppen einer Schmetterlingsart werden in einen Brutschrank gebracht. Man erhält folgende Messergebnisse:

Temperatur $[x]$	20.0°	22.0°	25.0°
Dauer des Puppenstadiums $[y]$	30	26.4	22.5

(i) Berechnen Sie das quadratische Polynom $f_1(x) = ax^2 + bx + c$, welches die Daten interpoliert, d.h. $f_1(20) = 30$, $f_1(22) = 26.4$ und $f_1(25) = 22.5$, und zeichnen es mitsamt der Daten in ein Diagramm ein. Wie lange dauert das Puppenstadium nach dieser Interpolation bei 23.0° ?

Lösung:

Um a, b und c zu berechnen setzten wir die Messdaten in f_1 ein und erhalten daraus drei Gleichungen für die drei Unbekannten

$$20^2a + 20b + c = 30 \tag{1}$$
$$22^2a + 22b + c = 26.4 \tag{2}$$
$$25^2a + 25b + c = 22.5 \tag{3}$$

Aus (1) folgt, dass

$$c = 30 - 20b - 20^2a.$$

Setzen wir dies in (2) ein, so folgt

$$\begin{aligned} 26.4 &= 22^2a + 22b + c = 22^2a + 22b + (30 - 20b - 20^2a) \\ &= (22^2 - 20^2)a + 2b + 30 = 84a + 2b + 30, \end{aligned}$$

also

$$2b = (26.4 - 30) - 84a \;\Rightarrow\; b = -1.8 - 42a.$$

Dies setzen wir in (3) ein und erhalten

$$\begin{aligned} 22.5 &= 25^2a + 25b + c = 25^2a + 25 \cdot (-1.8 - 42a) + (30 - 20 \cdot (-1.8 - 42a) - 20^2a) \\ &= 15a + 21, \end{aligned}$$

also

$$a = 0.15/15 = \frac{15/100}{15} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

Demnach ist

$$b = -1.8 - 42a = -1.8 - 42 \cdot 0.1 = -1.8 - 4.2 = -6$$

$$\text{und } c = 30 - 20b - 20^2a = 30 - 20 \cdot (-6) - 20^2 \cdot \frac{1}{10} = 30 + 120 - 40 = 110.$$

Das gesuchte Polynom lautet also

$$f_1(x) = \frac{1}{10}x^2 - 6x + 110.$$

und die Dauer des Puppenstadiums bei dieser Interpolation berechnet sich als $f_1(23) = 24.9$, also 24.9 Tage.

(ii) Wie groß ist - anhand des Modells aus (i) - die minimale Dauer des Puppenstadiums und bei welcher Temperatur wird sie erreicht ?

Lösung:

Es ist dass Minimum von $f_1(x)$ zu berechnen, dazu differenzieren wir $f_1(x)$ und erhalten

$$f_1'(x) = 2 \cdot \frac{1}{10}x - 6 = \frac{1}{5}x - 6.$$

Ein Kandidat für ein Minimum liegt dort vor, wo die erste Ableitung verschwindet, also

$$f_1'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{5}x - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 30.$$

Dies ist wegen $f_1''(x) = 1/5 > 0$ auch tatsächlich ein Minimum, die minimale Dauer des Puppenstadiums wird demnach bei 30° erreicht und beträgt $f_1(30) = 20$ Tage. **Bemerkung:** Dieser Aufgabenteil durfte auch zeichnerich gelöst werden, da offiziell die Ableitung noch nicht zur Verfügung steht.

(iii) Angenomen, das Ergebnis des Versuchs bei 22.0° stünde nicht zur Verfügung und Sie würden die beiden restlichen Ergebnisse durch eine Gerade $f_2(x) = ax+b$ interpolieren (also $f_2(x_i) = y_i$ für $i = 1, 3$). Wie würde diese lauten ? Tragen Sie die Gerade in das Diagramm aus (i) ein und berechnen für diese Interpolation den Wert bei 23.0°.

Lösung:

In diesem Aufgabenteil sind nur zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zu lösen:

$$20a + b = 30 \tag{4}$$
$$25a + b = 22.5. \tag{5}$$

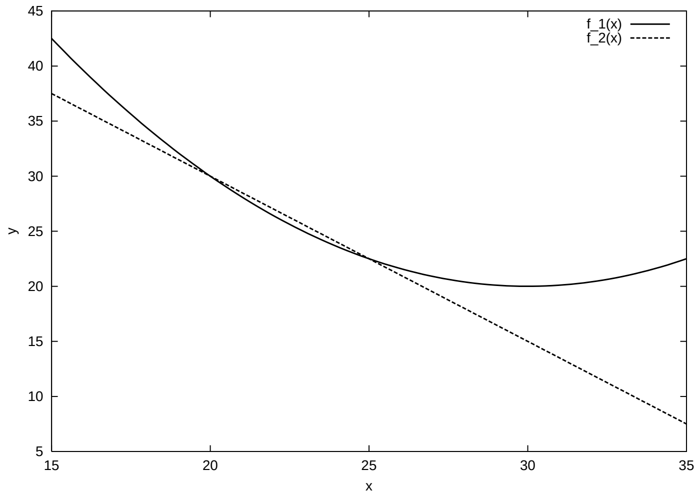
Nach (4) ist $b = 30 - 20a$; dies in (5) eingesetzt liefert

$$22.5 = 25a + (30 - 20a) = 30 + 5a \;\Rightarrow\; a = \frac{22.5 - 30}{5} = -\frac{7.5}{5} = -1.5 = -\frac{3}{2}$$

und daher $b = 30 - 20a = 60$. Also folgt

$$f_2(x) = -\frac{3}{2}x + 60$$

und als Wert bei 23° ergibt sich $f_2(23) = 25.5$



Aufgabe 2

Die Konzentration eines Medikaments im Körper eines Patienten am Tag $n+1$ nach der Verabreichung berechnet sich nach einem Modell zu $x_{n+1} = qx_n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(i) Bestimmen Sie q, falls die Konzentration nach 2 Tagen 6.4 und nach 4 Tagen 4.096 beträgt. Wie groß war die Anfangskonzentration x_0?

Lösung:

Es gilt

$$x_2 = 6.4 \text{ und } x_4 = 4.096 = qx_3 = q \cdot (qx_2) = q^2 x_2 = q^2 6.4$$
$$\Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{4.096}{6.4}} = 0.8.$$

und

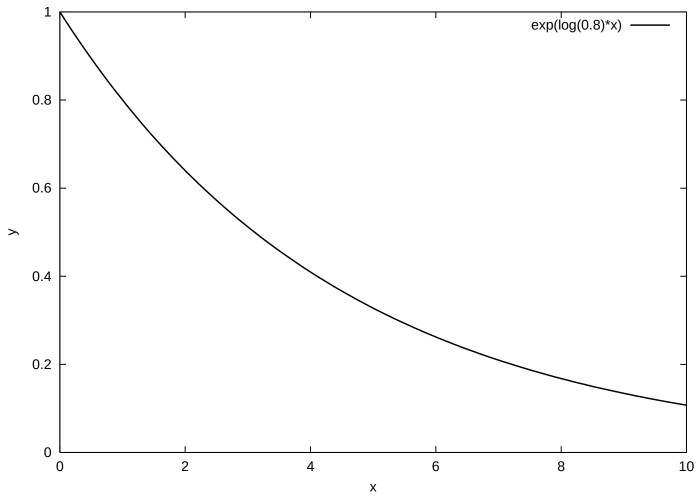
$$6.4 = x_2 = qx_1 = q^2 x_0 = 0.8^2 x_0 = 0.64 x_0 \;\Rightarrow\; x_0 = 10.$$

Demanch war die Anfangskonzentration 10, diese verringert sich pro Zeiteinheit um den Faktor $1 - 0.8 = 0.2$

(ii) Tragen Sie die Werte von x_0, x_2, x_4 und x_{10} gemeinsam mit der Funktion $x(t) = x_0 \exp(\ln(q)t)$ in ein Koordinatensystem ein. Dabei bezeichnet $\ln(x)$ den natürlichen Logarithmus. Was fällt Ihnen auf ?

Lösung:

Offenbar ist die Funktion $x(t)$ eine kontinuierliche Version (Interpolation) der oben



angegebenen Folge, man spricht von exponentiellem Zerfall.

(ii) Beweisen Sie, dass die Konzentration x_n für $n \to \infty$ verschwindet, also $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Lösung:

Es gilt

$$x_n = qx_{n-1} = q^2 x_{n-2} = q^n x_0$$

und wegen $|q| < 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$

also auch

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} q^n x_0 = 0.$$

Man hätte auch ein wenig lax mit (ii) und der Tatsache, dass $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ gilt, argumentieren können.

Aufgabe 3

Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen den Nukleotidsequenzen in der Desoxyribonukleinsäure (DNS) und den Aminosäuresequenzen in Proteinen. Nukleotidsequenzen in der DNS sind Abfolgen von vier verschiedenen Nukleotiden (mit den Basen A, T, C und G), Aminosäuresequenzen in Proteinen sind Abfolgen von 20 verschiedenen Aminosäuren.

(i) Wieviele verschiedene Nukleotidsequenzen der Länge n gibt es? Aus wievielen Elementen muss demnach eine Nukleotidsequenz mindestens bestehen, damit jeder dieser Sequenzen genau eine Aminosäuresequenz zugeordnet werden kann ?

Lösung:

Gegeben sei eine Nukleotidsequenz der Länge n. Für die erste Stelle gibt es 4 Möglichkeiten, diese zu besetzen, für die zweite ebenfalls, usw. Insgesamt gibt es also 4^n verschiedene Nukleotidsequenzen der Länge n. Damit eine eindeutige Zuordnung zu den Aminosäuresequenzen gegeben werden kann, muss $4^n > 20$ gelten, also $n = 3$.

(ii) Eine Änderung der Aminosäurensequenz kann zur Veränderung des betroffenen Proteins führen. Durch eine Manipulation sind in der Sequenz AAG zwei Basen falsch. Geben Sie alle möglichen manipulierten Sequenzen an, wie viele sind das ?

Lösung:

Es gibt insgesamt $\binom{3}{2}$ Möglichkeiten, aus einer Sequenz der Länge 3, zwei Stellen herauszusuchen, die falsch sind. Diese Kombinationen sind

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{x} & \mathrm{x} & \phantom{\mathrm{x}} \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{x} & \phantom{\mathrm{x}} & \mathrm{x} \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \phantom{\mathrm{x}} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \hline\end{array}$$

An den so herausgesuchten falschen Stellen können jeweils 3 andere Basen stehen, ist z.B. in AAG die erste Base falsch, so kämen in der falschen Sequenz T, C und G als erste Base in Betracht. An der zweiten falschen Stelle sind ebenfalls dreui andere Basen möglich, also gibt es allgemein

$$3 \cdot 3 \cdot \binom{3}{2} = 27$$

manipulierte Sequenzen.

(iii) Sei nun allgemein eine Sequenz der Länge n gegeben, bei der k Basen falsch sind. Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen Sequenzen.

Lösung:

Hier findet die gleiche Argumentation wie in (ii) Anwendung, es gibt allgemein

$$3^k \cdot \binom{n}{k}$$

mögliche Sequenzen der Länge n bei der k Basen falsch sind.