

Lösungshinweise zur 4. Übung

<http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie>

Aufgabe 1

Gegeben seien die Funktionen $f(x) = (x+1)^2(x-1)^2$ und $g(x) = (3x+4)^2(x-1000)$.

- (i) Bestimmen Sie den Grad von f , g , $f+g$ und $f \cdot g$.

Lösung

Der Grad eines Polynoms f ist die höchste Potenz von x , die in f vorkommt. Um den Grad zu bestimmen, müssen wir also die einzelnen Polynome in die Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

bringen. Falls $a_n \neq 0$, so ist n der Grad von f .

Hier gilt mit der dritten binomischen Formel

$$f(x) = (x+1)^2(x-1)^2 = ((x+1)(x-1))^2 = (x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1.$$

Die höchste Potenz von x ist 4, also folgt $\text{grad}(f) = 4$.

Für g gilt dann

$$\begin{aligned} g(x) &= (3x+4)^2(x-1000) = (9x^2 + 24x + 16) \cdot (x-1000) \\ &= 9x^3 + 24x^2 + 16x - 9000x^2 - 24000x - 16000 \\ &= 9x^3 - 8976x^2 - 23984x - 16000 \end{aligned}$$

Also ist $\text{grad}(g) = 3$. Betrachten wir nun $f+g$

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= x^4 - 2x^2 + 1 + 9x^3 - 8976x^2 - 23984x - 16000 \\ &= x^4 + 9x^3 - 8978x^2 - 23984x - 15999 \end{aligned}$$

Damit ist $\text{grad}(f+g) = 4$. Es fehlt noch $f \cdot g$

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (x^4 - 2x^2 + 1)(9x^3 - 8976x^2 - 23984x - 16000) \\ &= 9x^7 - 8976x^6 - 23984x^5 - 16000x^4 - 18x^5 + 17952x^4 + 47968x^3 + 32000x^2 \\ &\quad + 9x^3 - 8976x^2 - 23984x - 16000 \\ &= 9x^7 - 8976x^6 - 24002x^5 + 1952x^4 + 47977x^3 + 23024x^2 - 23984x - 16000 \end{aligned}$$

Daher berechnet sich der Grad von $f \cdot g$ zu 7.

- (ii) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f/g und g/f .

Lösung

Eine rationale Funktion ist überall definiert, wo der Nenner verschieden von Null ist, die Nullstellen von f und g berechnen sich wie folgt

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow (x+1)^2(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ oder } x = 1 \\ g(x) = 0 &\Rightarrow (3x+4)^2(x-1000) = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \text{ oder } x = 1000 \end{aligned}$$

Damit sind wir in der Lage den Definitionsbereich der rationalen Funktionen anzugeben:

$$\mathcal{D}(f/g) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -4/3, x \neq 1000\}$$

$$\mathcal{D}(g/f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1, x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \neq 1\}.$$

(iii) Wie verhält sich f/g bzw. g/f für $x \rightarrow \infty$?

Lösung

Nach (i) ist bekannt, dass $\text{grad}(f) = 4 > 3 = \text{grad}(g)$. Mit dem Kriterium aus der Vorlesung folgt also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Aufgabe 2

Ein Virus bricht aufgrund der Inkubationszeit bei einem Kollektiv infizierter Patienten, die sich alle zum Zeitpunkt $t = 0$ angesteckt haben, erst zu einem späterem Zeitpunkt $t > 0$ aus. Für den Anteil $y(t)$ der Patienten, bei denen der Virus noch nicht ausgebrochen ist, gilt nach einem Modell

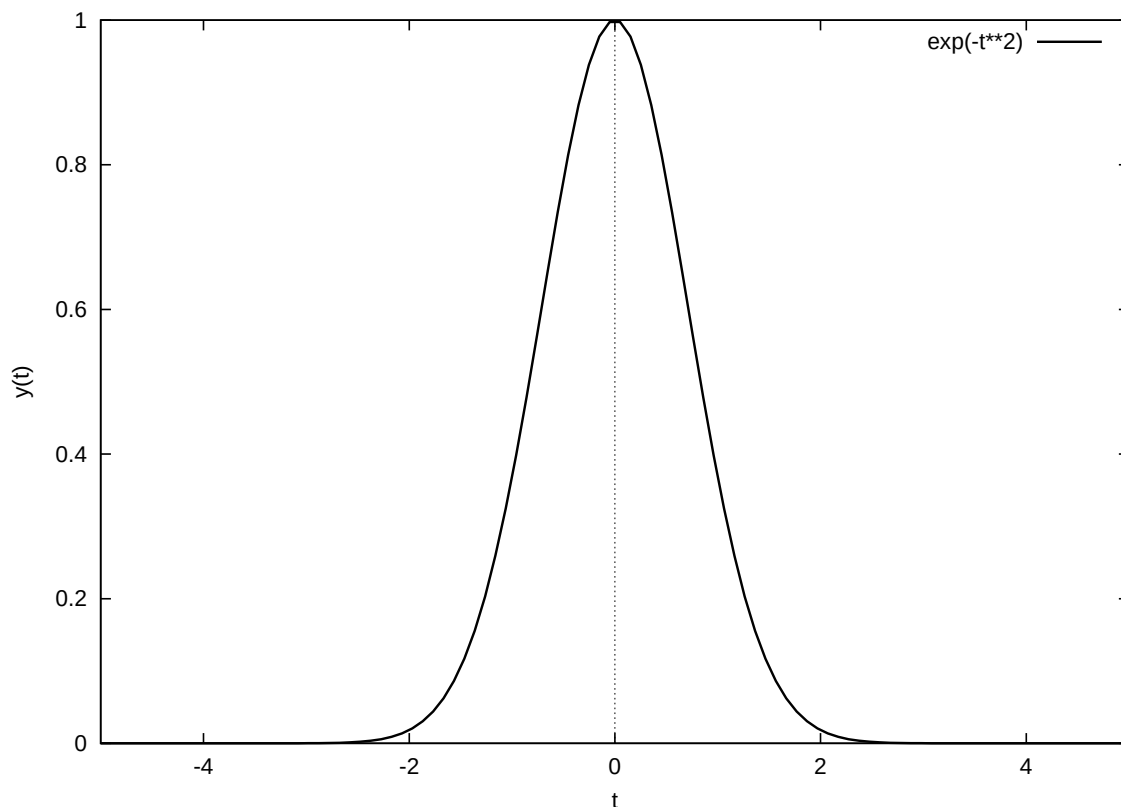
$$y(t) = \exp(-at^2)$$

mit einer von der Krankheit abhängigen Konstante $a > 0$.

(i) Zeichnen Sie $y(t)$ für $0 \leq t \leq 5$ und $a = 1$ in ein Koordinatensystem.

Lösung:

Skizze der Funktion $y(t) = \exp(-t^2)$:



Wir haben hier die Funktion zwischen -5 und 5 (obwohl im Kontext der Aufgabe negative Werte für t natürlich sinnlos sind) gezeichnet, da diese Funktion an anderer Stelle noch wichtig sein wird. $y(t)$ wird auch Glockenkurve genannt.

- (ii) Stellen Sie eine Formel auf für den Anteil der Patienten, bei denen der Virus ausgebrochen ist.

Lösung:

$y(t)$ beschreibt den *Anteil* der Personen, bei denen der Virus noch nicht ausgebrochen ist, also

$$y(t) = \frac{\text{Anzahl noch nicht erkrankter Personen}}{\text{Gesamtzahl der Personen}}.$$

Gesucht ist nach dem Anteil der erkrankten Personen, also

$$z(t) = \frac{\text{Anzahl erkrankter Personen}}{\text{Gesamtzahl der Personen}}.$$

Es ist $y(t) + z(t) = 1$, also $z(t) = 1 - y(t) = 1 - \exp(-at^2)$.

- (iii) Zu welchem Zeitpunkt haben wenigstens 50% der Patienten erste Anzeichen der Krankheit, wenn $a = 1$ gilt?

Lösung:

Gesucht ist nach dem t für das gilt ($a = 1$):

$$z(t) = 1 - \exp(-t^2) = 0.5 = \frac{1}{2}.$$

Mit Hilfe des $\ln$ folgt zunächst

$$-t^2 = \ln(1/2) \Rightarrow t^2 = -\ln(1/2) = \ln(2).$$

Wir sind nur an $t > 0$ interessiert und der gesuchte Wert berechnet sich als

$$t = \sqrt{\ln(2)} \sim 0.833.$$

Dies durfte man auch anhand der Skizze aus (a) ablesen, da der Logarithmus erst in der Vorlesung vom 15.11. eingeführt wurde.

- (iv) Zur Bestimmung von a für einen bestimmten Virustyp werden Probanden mit dem Virus infiziert. Zum Zeitpunkt $t = 1$ sind bereits bei 10% des Kollektivs erste Anzeichen der Krankheit erkennbar. Wie lautet die richtige Wahl von a ?

Lösung:

Zum Zeitpunkt $t = 1$ gilt also

$$1 - \exp(-a) = 10\% = 0.9 = \frac{9}{10}.$$

Es folgt

$$\exp(-a) = \frac{9}{10} \Rightarrow -a = \ln\left(\frac{9}{10}\right).$$

Also ist $a = \ln(10/9) \sim 0.105$ die richtige Wahl für diesen Virustyp. Falls der $\ln$ nicht bekannt ist, kann man sich dem gesuchten Wert von a auch mit dem Taschenrechner annähern.

Aufgabe 3

Zwischen den Temperaturwerten auf der Fahrenheitskala T_F und denen auf der Celsiuskala T_C besteht ein linearer Zusammenhang der Form

$$T_C = f(T_F) = aT_F + b$$

- (i) Für $T_F = 122^\circ F$ ist $T_C = 50^\circ C$ und $T_F = -13^\circ F$ korrespondiert zu $T_C = -25^\circ C$. Wie lauten a und b ?

Lösung:

In dieser Aufgabe muss zu gegebenen zwei Punkten die Gerade $aT_F + b$ berechnet werden. Für diese Problematik gibt es eine allgemeine Formel für a und b , die als Zwei-Punkte-Formel bekannt ist. Hier wollen wir aber a und b wie in Aufgabe 1 der 3. Übung bestimmen. Es gilt

$$50 = 122a + b \text{ und } -25 = -13a + b,$$

also $b = 50 - 122a$ und damit

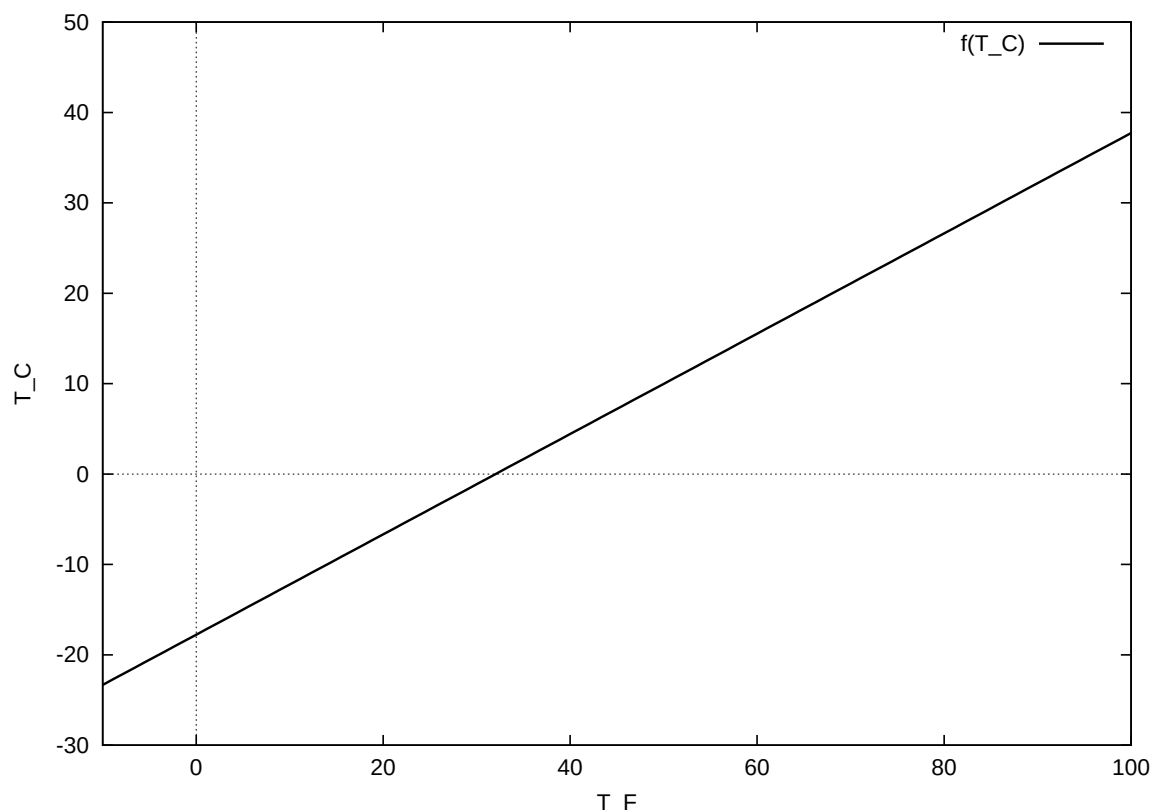
$$-25 = -13a + 50 - 122a \Rightarrow -135a = -75 \Rightarrow a = \frac{75}{135} \sim 0.556$$

Also folgt

$$b = 50 - 122a = 50 - \frac{9000}{135} = \frac{6750}{135} - \frac{9150}{135} = -\frac{2400}{135} = -17.778$$

Demnach folgt

$$T_C = f(T_F) = \frac{75}{135}T_F - \frac{2400}{135} \sim 0.5556T_F - 17.778$$



- (ii) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f . Welcher Temperatur in Fahrenheit entsprechen $0^\circ C$?

Lösung:

Wegen $a > 0$ ist f streng monoton wachsend, also existiert eine Umkehrfunktion f^{-1} . Es gilt

$$T_C = aT_F + b \Rightarrow T_F = \frac{T_C - b}{a} = \frac{T_C}{a} - \frac{b}{a} = \frac{135}{75} T_C + \frac{2400}{75} \sim 1.8 T_C + 32.$$

Daher ist

$$T_F = f^{-1}(T_C) = \frac{T_C}{a} - \frac{b}{a} = \frac{135}{75} T_C + \frac{2400}{75} \sim 1.8 T_C + 32.$$

die gesuchte Umkehrfunktion. Dies wollen wir durch Einsetzen bestätigen, es ist

$$f^{-1}(f(T_F)) = f^{-1}(aT_F + b) = \frac{1}{a}(aT_F + b) - \frac{b}{a} = T_F,$$

was zu beweisen war. Streng genommen, müsste man auch noch $f(f^{-1}(T_C)) = T_C$ nachrechnen.

Zu $T_C = 0^\circ C$ korrespondieren also

$$f^{-1}(0) = -\frac{b}{a} = 32,$$

also $32^\circ F$.

