

Lösungshinweise zur 5. Übung

<http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie>

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ableitungen und den Definitionsbereich der Funktionen

(i) $f_1(x) = (3x^5 - 2x^2)(1 - 2x^4)$

Lösung:

Die Funktion ist überall definiert, es gilt $\mathcal{D}(f_1) = \mathbb{R}$. Um f_2 abzuleiten, kann man zunächst die Klammern ausmultiplizieren und dann differenzieren, oder dies wie folgt direkt mit der Produktregel tun:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= (15x^4 - 4x)(1 - 2x^4) + (3x^5 - 2x^2)(-8x^3) \\ &= 15x^4 - 30x^8 - 4x + 8x^5 - 24x^8 + 16x^5 \\ &= -54x^8 + 24x^5 + 15x^4 - 4x \end{aligned}$$

(ii) $f_2(x) = (3x^2 - 2\exp(x))/(x^2 + 1)$

Lösung:

Die Funktion f_2 ist überall da definiert, wo der Nenner nicht verschwindet. Dies ist wegen $x^2 + 1 > 1$ nie der Fall, also gilt $\mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R}$. Weiter ist f_2 von der Form f/g und wird daher nach der Quotientenregel abgeleitet:

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{(6x - 2\exp(x))(x^2 + 1) - (3x^2 - 2\exp(x)) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{6x^3 + 6x - 2\exp(x)(x^2 + 1) - 6x^3 + 4x\exp(x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{6x - 2\exp(x)(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x - 2\exp(x)(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

(iii) $f_3(x) = \ln(\sqrt{3x^2 + 5})$

Lösung:

Um das Definitionsgebiet von f_3 zu inspizieren, untersuchen wir zunächst die Wurzel. Diese ist überall definiert, da der Radikant stets positiv ist. Dann ist auch die Wurzel positiv und daher der $\ln$ definiert, also ist auch hier $\mathcal{D}(f_3) = \mathbb{R}$. Die Funktion wird nach der Kettenregel differenziert, es gilt

$$f_3'(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 5}} \cdot 6x = \frac{3x}{3x^2 + 5}.$$

(iv) $f_4(x) = 1/(1 - |x|)$

Lösung:

Der Nenner von f_4 verschwindet da, wo $|x| = 1$ gilt. Also

$$\mathcal{D}(f_4) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$$

Beim Differenzieren kommt die (kleine) Quotientenregel zur Anwendung, wegen dem Betrag im Nenner ist eine Fallunterscheidung nötig

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \begin{cases} -1/(1-|x|)^2 \cdot (-1) & \text{für } x > 0 \\ -1/(1-|x|)^2 \cdot 1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1/(1-|x|)^2 & \text{für } x > 0 \\ -1/(1-|x|)^2 & \text{für } x < 0 \end{cases} = \frac{x}{|x|(1-|x|)^2} \end{aligned}$$

(v) $f_5(x) = \sin(1/x)$ (Es gilt $\sin'(x) = \cos(x)$)

Lösung:

Der Definitionsbereich von $\sin(x)$ ist $\mathbb{R}$, das Argument $1/x$ ist für $x \neq 0$ definiert, also

$$\mathcal{D}(f_5) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Die Funktion wird mit Hilfe der Kettenregel differenziert, es gilt

$$f_5'(x) = \cos(1/x) \cdot (-1/x^2) = -\frac{\cos(1/x)}{x^2}.$$

Aufgabe 2

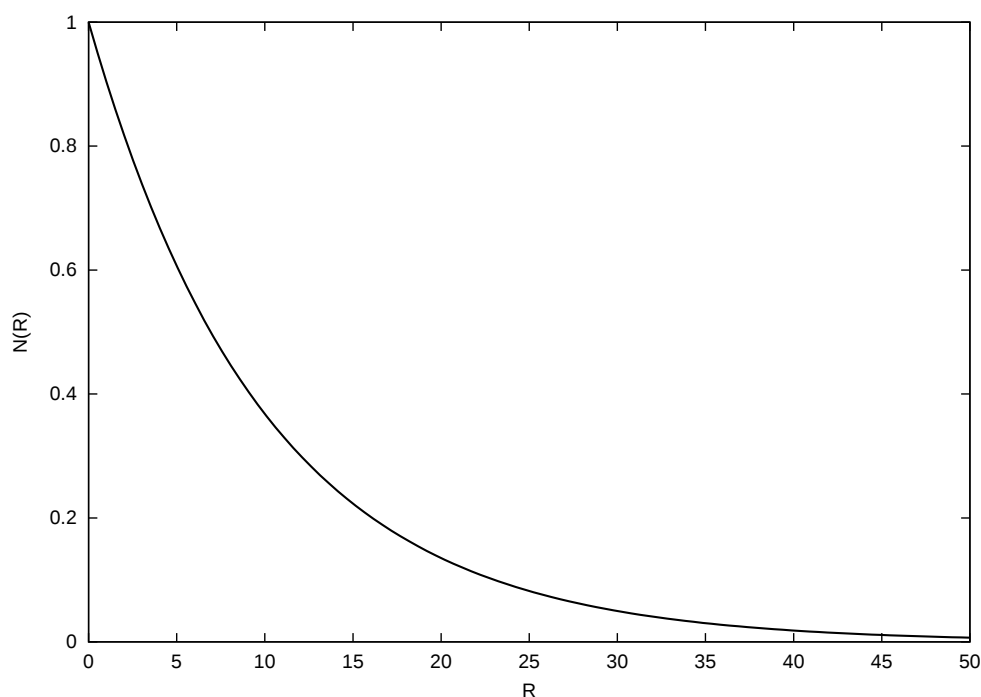
Bestrahlt man gewisse Stämme von Tabak-Viren (z.B. Ancuba) mit Röntgenstrahlen der Dosis R , so wird ein Teil der Viren inaktiviert. Die Anzahl der überlebenden Viren $N(x)$ nimmt dabei exponentiell mit der Röntgendosis ab:

$$N(R) = N_0 \exp(-\sigma R).$$

Hierbei ist die Zerfallskonstante $\sigma > 0$ abhängig vom Biotop.

- (i) Zeichnen Sie die Funktion für $N_0 = 1$ und $\sigma = 0.1$ für $R > 0$. Welches Monotonieverhalten besitzt $N(R)$?

Lösung:



Man erkennt, dass N streng monoton fallend ist, dies zeigt auch die Inspektion der Ableitung, vgl. (ii)

- (ii) Berechnen Sie $N'(R)$ und zeigen Sie durch Einsetzen, dass $N(R)$ Lösung folgender Differentialgleichung ist:

$$N'(R) = -\sigma N(R)$$

Lösung:

Differenzieren wir N , so ergibt sich

$$N'(R) = -\sigma N_0 \exp(-\sigma R) = -\sigma N(R),$$

also löst $N(R)$ die Differentialgleichung. Offenbar beschreibt diese exponentiellen Zerfall des Anfangbestands $N(0) = N_0$.

- (iii) Sei nun $\sigma = 0.1$. Welche Dosis R ist erforderlich, um 80% der Viren zu inaktivieren ?

Lösung:

Um 80% der Viren zu inaktivieren ist die Dosis R erforderlich, für die gilt

$$\frac{N(R)}{N_0} = 20\% = 20/100 = 1/5$$

Also ist die Dosis R mit $\exp(-\sigma R) = 1/5$ gesucht. Unter Benutzung des Logarithmus rechnen wir nun

$$\begin{aligned} \exp(-\sigma R) &= 1/5 \\ \Leftrightarrow -\sigma R &= \ln(1/5) = -\ln(5) \\ \Leftrightarrow R &= \frac{\ln(5)}{\sigma} = \frac{\ln(5)}{1/10} = 10 \ln(5) \sim 16.094379 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Die Regel von l'Hospital liefert eine Formel für den Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)}$$

im Fall $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \lim_{t \rightarrow a} g(t) = 0$. Falls $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)} \in \mathbb{R}$, so gilt nach dieser Regel

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

- (i) Berechnen Sie mit der Regel von l'Hospital den Grenzwert

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\exp(\lambda\tau) - 1}{\tau}.$$

Lösung:

Wir wenden die Regel von l'Hospital mit $f(\tau) = \exp(\lambda\tau) - 1$ und $g(\tau) = \tau$ an. Offenbar gilt $f(0) = g(0) = 0$. Weiter ist

$$\frac{f'(\tau)}{g'(\tau)} = \frac{\lambda \exp(\lambda\tau)}{1}.$$

Offenbar existiert der Grenzwert

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f'(\tau)}{g'(\tau)} = \lambda \in \mathbb{R},$$

also können wir die Regel von l'Hospital anwenden und

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\exp(\lambda\tau) - 1}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\lambda \exp(\lambda\tau)}{1} = \lambda$$

folgern.

- (ii) Berechnen Sie mittels des Differenzenquotienten und (i) die Ableitung von $x(t) = \exp(\lambda t)$.

Lösung:

Der Differenzenquotient lautet

$$Q_t(\tau) = \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau} = \frac{\exp(\lambda(t+\tau)) - \exp(\lambda t)}{\tau} = \frac{\exp(\lambda\tau) - 1}{\tau} \exp(\lambda t).$$

Schicken wir nun $\tau \rightarrow 0$, so folgt mit (i)

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} Q_t(\tau) = \exp(\lambda t) \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\exp(\lambda\tau) - 1}{\tau} = \lambda \exp(\lambda t).$$

Also ist $x(t)$ differenzierbar in t mit der Ableitung

$$\dot{x}(t) = \lambda \exp(\lambda t)$$

- (iii) Betrachten Sie nun die Folge $x_n = \exp(n\lambda)$. Für welches g gilt $x_{n+1} = g(x_n)$?

Lösung:

Es ist

$$x_{n+1} = \exp((n+1)\lambda) = \exp(\lambda) \exp(n\lambda) = \exp(\lambda) x_n =: g(x_n)$$

Dies erklärt Aufgabe 2 (iii) der dritten Übung: Ist das diskrete System $x_{n+1} = qx_n$ gegeben, so ist offenbar mit $\lambda = \ln(q)$

$$x_{n+1} = qx_n = \exp(\lambda)x_n,$$

was von

$$x_n = x_0 \exp(\lambda n) = x_0 \exp(\ln(q)n)$$

gelöst wird. Demnach wird x_n durch $x(t) = x_0 \exp(\ln(q)t)$ interpoliert, was man in der Zeichnung erkannt hat.