MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
6.12.2002

Lösungshinweise zur 6. Übung

http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie

Aufgabe 1

In der Enzymkinetik spielt die sogenannte Michaelis-Menten Gleichung eine wichtige Rolle. Die Umwandlungsgeschwindigkeit y steht dabei mit der Konzentration x des Substrats näherungsweise in dem Zusammenhang

$$y(x) = \frac{ax}{x+b},$$

wobei a und b positive Konstanten sind.

(i) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und das Krümmungsverhalten von y auf $[0, \infty)$.

Lösung:

Um das Monotonieverhalten zu bestimmen, berechnen wir die erste Ableitung

$$y'(x) = \frac{a(x+b) - ax}{(x+b)^2} = \frac{ab}{(x+b)^2} > 0.$$

Also ist y monoton steigend. Zur Untersuchung des Krümmungsverhaltens berechnen wir die zweite Ableitung

$$y''(x) = -2ab\frac{x+b}{(x+b)^4} = -2\frac{ab}{(x+b)^3} < 0$$

Demnach hat y keinen Wendepunkt, die Krümmung ist negativ (*Rechtskurve*). Man sagt, y ist streng konkav.

(ii) Wo ist y minimal, wo maximal ? Was passiert für $x \to \infty$?

Lösung:

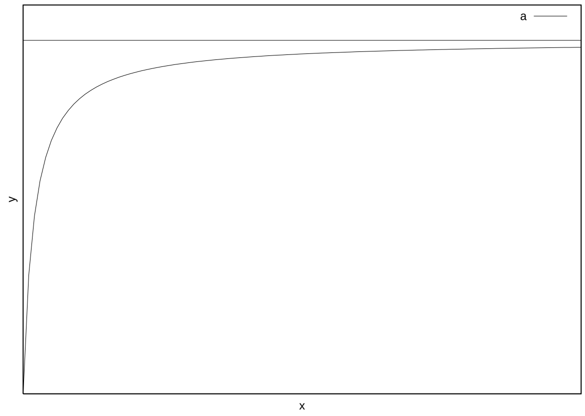
Wegen $y'(x) > 0$ gibt es keine Nullstelle der Ableitung und daher auch keine lokalen Minima. Die Funktion ist streng monoton wachsend, und ist daher im Intervall $[0, \infty)$ für $x = 0$ minimal. Das Minimum ist daher $y(0) = 0$. Für $x \to \infty$ folgt mit den Regeln aus der Vorlesung

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = a.$$

Aufgrund des Monotonieverhaltens von y ist a auch der maximale Werte von y. Natürlich wird dieser nie angenommen, die entsprechende mathematische Bezeichnung lautet Supremum und ist als die kleinste obere Schranke von y definiert.

(iii) Zeichnen Sie $y(x)$ qualitativ.

Lösung:



Aufgabe 2

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit dem Ertragsgesetz von Mitscherlich: Der Ertrag einer Pflanze ist der Gehalt einer Pflanze an einem bestimmten Stoff pro Einheit Trockenmasse. Man bietet der Pflanze zusätzlich zu dem natürlichen Gehalt im Boden die Menge x dieses Stoffes an. Es stellt sich nach einiger Zeit in der Pflanze der Ertrag y ein. Der Ertrag ist eine Funktion der angebotenen Stoffmenge, d.h. $y = y(x)$. Das Ertragsgesetz lautet

$$\frac{d}{dx}y(x) = c(a - y(x))$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $y(x) = a + b\exp(-cx)$ für beliebige reelle Konstanten b die Differentialgleichung löst.

Lösung:

Um zu verifizieren, dass y die Differentialgleichung erfüllt, berechnen wir die Ableitung:

$$y'(x) = -cb\exp(-cx)$$

Setzen wir $y(x)$ auf der rechten Seite ein, so ergibt sich

$$c(a - y(x)) = c(a - a - b\exp(-cx)) = -cb\exp(-cx),$$

was zu beweisen war.

(ii) Bestimmen Sie b so, dass die Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ erfüllt ist.

Lösung:

Zu lösen ist $y(0) = y_0$, also

$$y_0 = a + b\exp(-c \cdot 0) = a + b \;\Rightarrow\; b = y_0 - a.$$

(iii) Geben Sie nun die Lösung $y(x)$ der Anfangswertaufgabe

$$\frac{d}{dx}y(x) = 2 - y(x),\; y(0) = 1$$

an. Diskutieren Sie das Monotonieverhalten und das Grenzverhalten für $x \to \infty$. Was bedeutet dies für den Ertrag der Pflanze ?

Lösung:

Die hier zu untersuchende Differentialgleichung ist diejenige aus (i) mit $a = 2$ und $c = 1$. Der zugehörige Anfangswert ist $y_0 = 1$, also mit (ii) $b = -1$. Daher lautet die Lösung

$$y(x) = a + b\exp(-cx) = 2 - \exp(-x).$$

Es ist $y'(x) = \exp(-x) > 0$, daher wächst die Funktion streng monoton. Für $x \to \infty$ läuft $\exp(-x)$ gegen 0 und daher folgt

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 2.$$

Es gibt daher einen maximalen Ertrag der Pflanze. Der maximale Wert des Ertrags, der sogenannte Grenzertrag ist 2, d.h. es gilt $y(x) < 2$. Allerdings ist für große x der Ertrag $y(x)$ dem Grenzertrag 2 schon sehr nahe, so daß eine zusätzliche Gabe nur noch marginale Änderungen bedeutet, der Grenzertrag selbst kann nie erreicht oder gar übertroffen werden.

Bemerkung: Inzwischen ist dies eh klar, $y = 2$ ist stationärer Punkt der Gleichung, anhand der Differentialgleichung erkennt man, dass $y'(x) > 0$ falls $y(x) < 2$ bzw. $y'(x) < 0$ falls $y(x) > 2$. Daher läuft die Lösung stets gegen den (stabilen) stationären Punkt $y = 2$.

Aufgabe 3

Bei der C^{14}-Methode zur Altersbestimmung nutzt man aus, daß in lebenden Organismen das Verhältnis von C^{14} und C^{12} einen festen Wert c_0 hat. In toten Organismen zerfällt das Isotop C^{12} praktisch nicht, während das Isotop C^{14} mit einer Halbwertszeit von 5760 Jahren zerfällt (d.h. nach 5760 Jahren ist nur noch ein die Hälfte des Isotops vorhanden). Im Nildelta wurde 1989 ein hölzerner Bootsbalken gefunden, bei dem das Verhältnis von C^{14} und C^{12} auf 75% von c_0 gesunken war. Bestimmen Sie das Alter des Balkens, indem Sie exponentiellen Zerfall zu Grunde legen.

Lösung:

Sei t_0 das Alter des Balkens im Jahre 1989. Wir wenden das Zerfallsgesetz an und erhalten

$$\begin{aligned} & c_0 \exp(-\sigma t_0) = 0.75 c_0 = \frac{3}{4} c_0 \\ \Leftrightarrow \quad & \exp(-\sigma t_0) = \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & -\sigma t_0 = \ln(3/4) \\ \Leftrightarrow \quad & t_0 = -\frac{\ln(3/4)}{\sigma}. \end{aligned}$$

Allerdings ist die Zerfallskonstante σ noch unbekannt, diese berechnet sich aus der bekannten Halbwertszeit von 5760 Jahren wie folgt:

$$\begin{aligned} & \exp(-5760\sigma) = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & -5760\sigma = \ln(1/2) = -\ln(2) \\ \Leftrightarrow \quad & \sigma = \frac{\ln(2)}{5760}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$t_0 = -5760 \frac{\ln(3/4)}{\ln(2)} \sim 2390.616$$

Der Bootsbalken ist demnach heute ungefähr 2403 Jahre alt.