MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
13.12.2002

Lösungshinweise zur 7. Übung

http://www.mi.uni-koeln.de/∼mkurth/biologie

Aufgabe 1

Der Blutalkoholspiegel B wird nach einem Modell in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion

$$B(t) = B_0 + B_1 \left(\frac{1}{1+at} - \frac{1}{1+bt} \right)$$

beschrieben. Dabei gelte für die Konstanten $B_0, B_1 > 0$ und $0 < a < b$.

(i) Welche Bedeutung hat B_0?

Lösung:

Es gilt $B(0) = B_0$, daher ist B_0 der Blutalkoholspiegel am Anfang der Beobachtung.

(ii) Wann ist der Blutalkoholspiegel maximal? Welcher Wert stellt sich langfristig ein?

Lösung:

Um den maximalen Blutalkoholspiegel zu berechnen, müssen wir zunächst $B(t)$ nach t differenzieren:

$$\dot{B}(t) = B_1 \left(-\frac{a}{(1+at)^2} + \frac{b}{(1+bt)^2} \right).$$

Kandidaten für Extrema sind Nullstellen von $\dot{B}(t)$, also

$$\begin{aligned} \dot{B}(t) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \frac{b}{(1+bt)^2} = \frac{a}{(1+at)^2} \\ &\Leftrightarrow\; b(1+at)^2 = a(1+bt)^2 \\ &\Leftrightarrow\; b(1+2at+a^2t^2) = a(1+2bt+t^2) \\ &\Leftrightarrow\; (a^2b - b^2a)t^2 = a - b \\ &\Leftrightarrow\; abt^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; t = \pm\frac{1}{\sqrt{ab}}. \end{aligned}$$

Natürlich interessiert im Modell nur der positive Wert. Um zu untersuchen, ob an dieser Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, müssen wir die zweite Ableitung inspizieren:

$$\begin{aligned} \ddot{B}(t) &= B_1 \left(2a^2 \frac{1+at}{(1+at)^4} - 2b^2 \frac{1+bt}{(1+bt)^4} \right) \\ &= B_1 \left(2a^2 \frac{1+at}{(1+at)^4} - 2b^2 \frac{1+bt}{(1+bt)^4} \right) \\ &= 2B_1 \left(\frac{a^2}{(1+at)^3} - \frac{b^2}{(1+bt)^3} \right). \end{aligned}$$

Setzen wir nun für t den oben errechneten Wert ein, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\ddot{B}(\frac{1}{\sqrt{ab}}) &= 2B_0\left(\frac{a^2}{(1+a/\sqrt{ab})^3} - \frac{b^2}{(1+b/\sqrt{ab})^3}\right) \\
&= 2B_0\left(\frac{a^2}{(1+\sqrt{a/b})^3} - \frac{b^2}{(1+\sqrt{b/a})^3}\right) \\
&= 2B_0\left(\frac{a^2(1+\sqrt{b/a})^3 - b^2(1+\sqrt{a/b})^3}{(1+\sqrt{a/b})^3(1+\sqrt{b/a})^3}\right) \\
&= 2B_0\left(\frac{a^2(1+3\sqrt{b/a}+3b/a+(b/a)^{3/2}) - b^2(1+3\sqrt{a/b}+3a/b+(a/b)^{3/2})}{(1+\sqrt{a/b})^3(1+\sqrt{b/a})^3}\right) \\
&= 2B_0\left(\frac{a^2+3a\sqrt{ab}+3ab+a^{1/2}b^{3/2} - (b^2+3b\sqrt{ab}+3b+(a^{3/2}b^{1/2})}{(1+\sqrt{a/b})^3(1+\sqrt{b/a})^3}\right) \\
&= 2B_0\left(\frac{a^2+3a\sqrt{ab}+3ab+b\sqrt{ab} - (b^2+3b\sqrt{ab}+3b+a\sqrt{ab}}{(1+\sqrt{a/b})^3(1+\sqrt{b/a})^3}\right) \\
&= 2B_0\left(\frac{a^2-b^2+3(a-b)\sqrt{ab}+(b-a)\sqrt{ab}}{(1+\sqrt{a/b})^3(1+\sqrt{b/a})^3}\right) \\
&= 2B_0\left(\frac{(a-b)(a+b)+2(a-b)\sqrt{ab}}{(1+\sqrt{a/b})^3(1+\sqrt{b/a})^3}\right) \\
&= 2B_0(a-b)\left(\frac{(a+b)+2\sqrt{ab}}{(1+\sqrt{a/b})^3(1+\sqrt{b/a})^3}\right) < 0
\end{aligned}
$$

wegen $0 < a < b$. Also liegt an dieser Stelle tatsächlich ein Maximum vor. Langfristig gilt

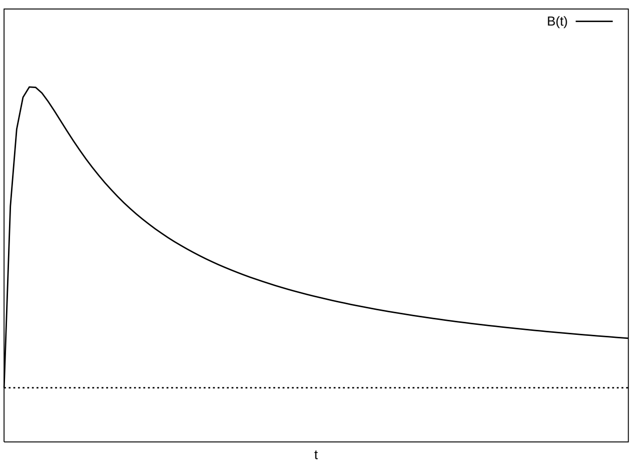
$$\frac{1}{1+at} \to 0 \text{ für } t \to \infty \text{ und } \frac{1}{1+at} \to 0 \text{ für } t \to \infty,$$

folglich $B(t) \to B_0$ für $t \to \infty$.

(iii) Fertigen Sie eine qualitative Skizze von $B(t)$ an.

Lösung:

Es ist aus (ii) bekannt, dass B an der Stelle 0 den Wert B_0 hat, dort ist die Steigung $\dot{B}(0) = B_1(b-a) > 0$. Bis zur Zeit $t = 1/\sqrt{ab}$ steigt B dann streng monoton, nimmt dort sein Maximum an und fällt danach streng monoton gegen den Wert B_0.



Aufgabe 2

Eine Population entwickele sich gemäß der Verhulst-Gleichung

$$\dot{x}(t) = x(t)(2 - x(t)) \text{ mit } x(0) = x_0 > 0.$$

(i) Bestimmen Sie die stationären Punkte $\overline{x}$ der Gleichung, also die Lösungen mit $x(t) = \overline{x}$.

Lösung:

Die Verhulst-Gleichung können wir schreiben als $\dot{x} = f(x)$ mit

$$f(x) := x(2 - x)$$

Nach Definition sind die stationären Punkte der Gleichung die Nullstellen von f, also

$$\overline{x}_1 = 0 \text{ und } \overline{x}_2 = 2.$$

(ii) Welches Monotonieverhalten besitzt $x(t)$?

Lösung:

Das Monotonieverhalten hängt von Startwert x_0 ab. Ist $x_0 < \overline{x}_2 = 2$, so gilt

$$\dot{x}(0) = x(0)(2 - x(0)) = x_0(2 - x_0) > 0.$$

Also wächst $x(t)$ monoton, jedenfalls so lange wie $x(t) < 2$. Würde $x(t)$ den stationären Punkt $\overline{x}_2 = 2$ zu einer Zeit T erreichen, so würde die Lösung wegen $\dot{x}(T) = 0$ für $t > T$ in $\overline{x}_2$ verweilen. Also ist $x(t)$ monoton wachsend. übrigens ist wegen der eindeutigen Lösbarkeit der Differentialgleichung klar, dass $x(t)$ nie den stationären Punkt erreicht, sondern asymptotisch gegen diesen läuft, vgl. (iii). Für $x_0 > 2$ kann auf analogem Wege gezeigt werden, dass die zugehörige Lösung $x(t)$ wegen

$$\dot{x}(t) < 0 \text{ für } x(t) > 2$$

monoton fallend ist. Ist $x_0 = 2$, so ist die zugehörige Lösung $x(t) = 2$ für alle $t > 0$, also ist sie konstant.

(iii) Untersuchen Sie mit Hilfe der expliziten Lösung das Verhalten für $t \to \infty$.

Lösung:

Nach Vorlesung und (ii) ist klar, dass alle Lösungen gegen den (stabilen) stationären Punkt $\overline{x}_2 = 2$ laufen. Dies soll hier anhand der expliziten Lösung hier verifiziert werden. Es ist bekannt, dass die Verhulstgleichung durch die logistische Kurve $L(t)$ gelöst wird, genauer für $x_0 \neq 2$:

$$x(t) = L(t) = \frac{2}{1 + \exp(b - 2t)}.$$

Dabei ist b aus dem Anfangswert zu errechnen, es gilt $b = \ln(2/y_0 - 1)$. Unabhängig vom Wert von b läuft $\exp(b - 2t)$ für $t \to \infty$ gegen 0. Also folgt

$$x(t) \to 2 \text{ für } t \to \infty.$$

Aufgabe 3

Die Michaelis-Menten-Gleichung lässt sich auch als Differentialgleichung auffassen, wenn man die Konzentration des Substrats als Funktion x der Zeit t betrachtet. Die Umwandlungsgeschwindigkeit ist dann die Ableitung von x nach der Zeit, also $\dot{x}(t)$, und es gilt

$$\dot{x}(t) = \frac{Ax(t)}{k + x(t)} \text{ mit } x(0) = x_0 > 0.$$

Dabei sind A und k positive Konstanten.

(i) Sei $x(t)$ eine Funktion, die

$$\frac{k}{A} \ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) + \frac{1}{A}(x(t) - x_0) = t \text{ für alle } t \geq 0$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Lösung:

Um zu zeigen, dass $x(t)$ Lösung der Michaelis-Menten-Gleichung ist, müssen wir obige Beziehung nach t differenzieren:

$$\begin{aligned}
&\frac{k}{A}\frac{1}{x(t)/x_0}\frac{\dot{x}(t)}{x_0} + \frac{1}{A}\dot{x}(t) = 1 \\
\Leftrightarrow\ &\dot{x}(t)\left(\frac{k}{Ax(t)} + \frac{1}{A}\right) = 1 \\
\Leftrightarrow\ &\dot{x}(t) = \frac{1}{\frac{k}{Ax(t)} + \frac{1}{A}} = \frac{1}{\frac{k+x(t)}{Ax(t)}} = \frac{Ax(t)}{k + x(t)},
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(ii) Beantworten Sie durch Analyse der Differentialgleichung die folgenden Fragen:

- Welches Monotonieverhalten besitzt $x(t)$?
- Welches Krümmungsverhalten besitzt $x(t)$?
- Was passiert für $t \to \infty$?

Fertigen Sie anhand dieser Resultate eine qualitative Skizze von $x(t)$ an.

Lösung:

Sei zur qualitativen Analyse der Michaelis-Menten-Gleichung

$$f(x) = Ax/(k + x)$$

gesetzt. Dann ist $f(x) > 0$, also ist $\dot{x}(t) = f(x) > 0$, d.h. $x(t)$ ist monoton steigend. Weiter gilt

$$f'(x) = kA/(k + x)^2 > 0,$$

vgl. Aufgabe 1 (i) der 5.Übung. Demzufolge ist dann

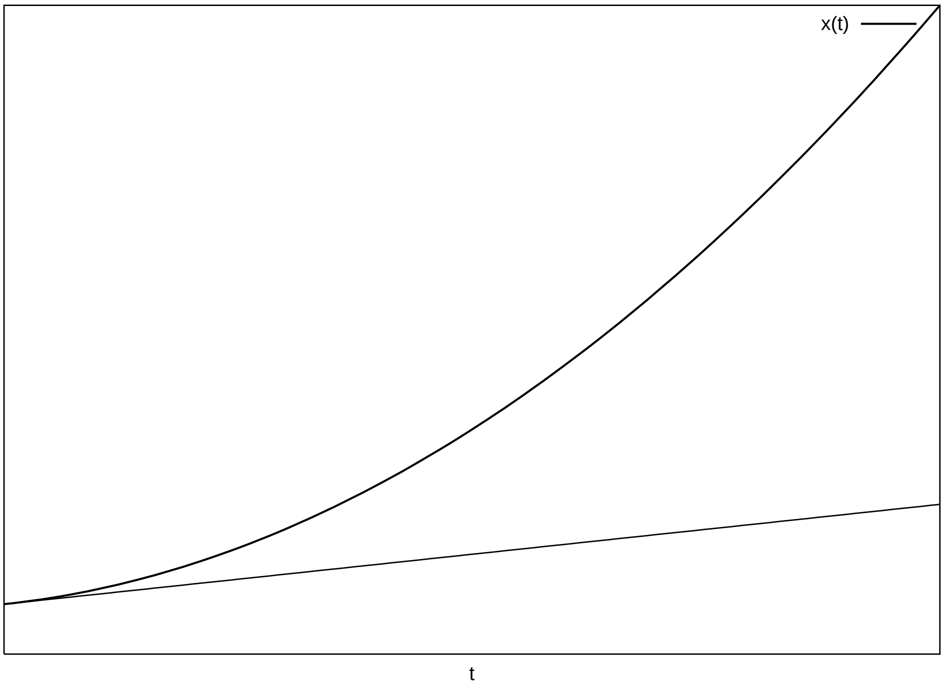
$$\ddot{x}(t) = f'(x)\dot{x}(t) > 0,$$

die Krümmung der Lösung ist also positiv (*Linkskurve*).

Untersuchen wir nun das Verhalten für $t \to \infty$: Es ist bekannt, dass $x(t)$ monton wachsend und linksgekrümmt ist. Dann ist anschaulich klar, dass $x(t)$ gegen ∞ laufen muss. Um dies zu beweisen, bemerken wir, dass wegen der Monotonie von f und $x(t)$ stets $f(x(t)) > f(x(0))$ gilt. Dann gilt offenbar ebenfalls

$$\dot{x}(t) > f(x(0)),$$

was bedeutet, dass die Lösung $x(t)$ stets über der Gerade g, die in x_0 startet und Steigung $f(x(0))$ hat, liegt. Da diese Gerade für $t \to \infty$ gegen ∞ läuft, muss $x(t)$ diese auch tun. Dies ist auch aus folgenden Überlegungen ersichtlich: Würde $x(t) \to \overline{x} < \infty$ gelten, so müsste $\overline{x}$ ein stationärer Punkt sein. Einziger stationärer Punkt ist allerdings $\overline{x} = 0$, was wegen $x_0 > 0$ und der Monotonie von $x(t)$ nicht der Grenzwert von x sein kann.



Bemerkung: Leider hat sich in der Aufgabenstellung ein kleiner Fehler eingeschlichen: Hätte in der Aufgabe ein Minuszeichen vor dem Bruchstrich gestanden, so würde $x(t)$ monoton fallend sein und gegen den stationären Punkt $\overline{x} = 0$ laufen. Dieses Minuszeichen gehört natürlich in die korrekte Michaelis-Menten Gleichung.