MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
20.12.2002

Lösungshinweise zur 8. Übung

http://www.mi.uni-koeln.de/∼mkurth/biologie

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe betrachten wir die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) := -5x(x-4)^2.$$

(i) Zeichnen Sie den Graphen von f qualitativ, geben Sie die stationären Punkte und deren Stabilität an, und tragen Sie die Richtungspfeile der Evolutionen ein.

Lösung:

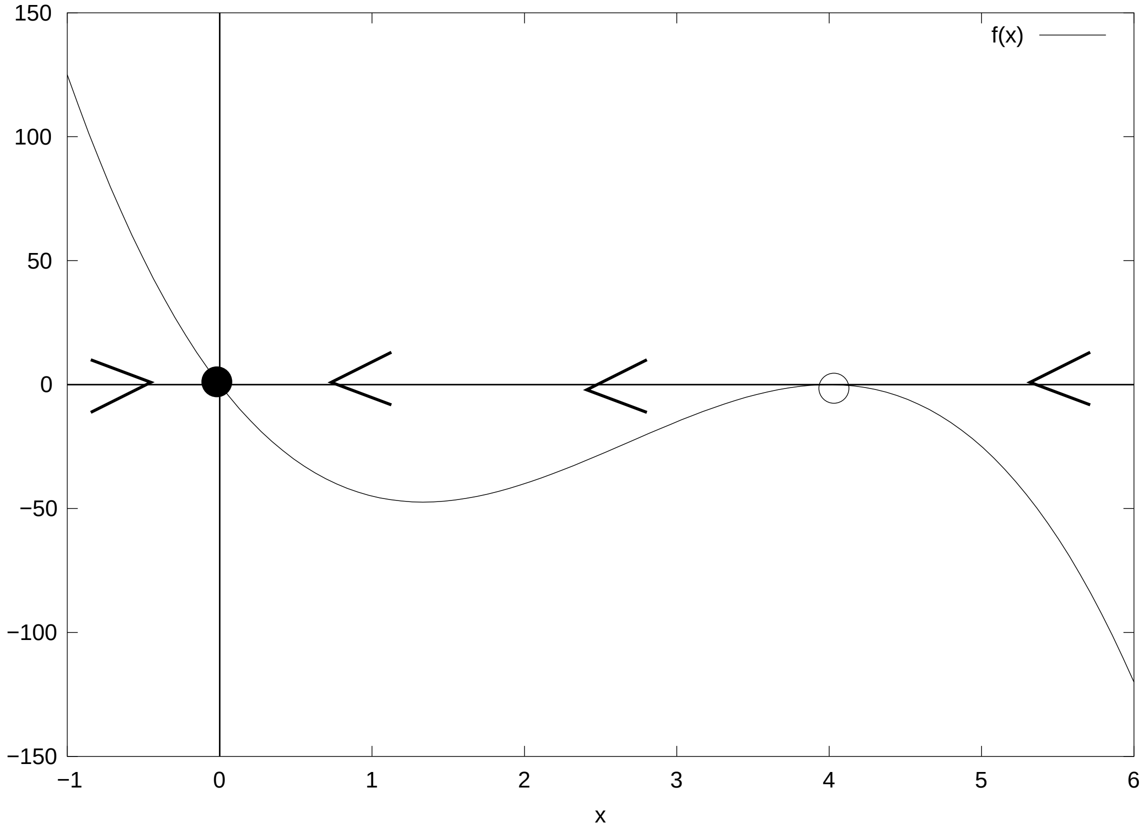
Die stationären Punkte sind die Nullstellen von f, also

$$f(\overline{x}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{x} = 0 \text{ oder } \overline{x} = 4.$$

Zwischen den stationären Punkten, also für $0 < x(t) < 4$, ist $f(x(t))$ negativ, also gilt dort

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) < 0.$$

Ist $x(t) > 4$, so ist $f(x(t))$ ebenfalls negativ und somit auch $\dot{x}(t)$. Für $x(t) < 0$ hingegen ist $f(x(t)) > 0$ und damit auch $\dot{x}(t)$ positiv. Also laufen in der Umgebegung des stationären Punktes $\overline{x} = 0$ alle Lösungen gegen diesen, er ist stabil. Der stationäre Punkt $\overline{x} = 4$ ist hingegen instabil, da alle Lösungen mit $x(0) < 4$ wegen $\dot{x}(t) < 0$ von ihm weglaufen.



(ii) Für welche Anfangswerte $x(0)$ besitzt die zugehörige Lösung einen Wendepunkt?

Lösung:

Gesucht ist also ein $\bar{t} > 0$, so dass für die Lösung $x(t)$ zum Anfangswert $x(0)$ gilt: $\ddot{x}(\bar{t}) = 0$. Nutzen wir die Differentialgleichung aus, so folgt

$$f'(x(\bar{t})) = 0.$$

Die Ableitung von f berechnet sich als

$$f'(x) = -5(x-4)^2 - 10x(x-4) = -5(x^2 - 8x + 16) - 10x^2 + 40x = -15x^2 + 80x - 80.$$

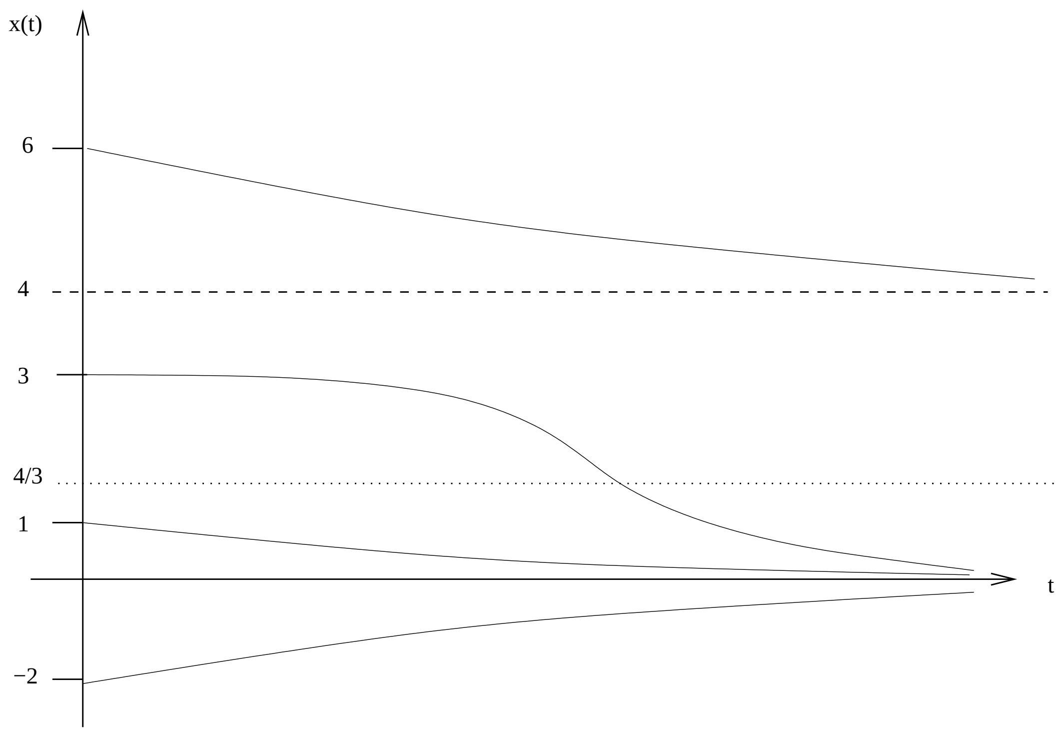
Mit Hilfe der pq-Formel finden wir die Nullstellen von f' als

$$x = \frac{4}{3} \text{ bzw. } x = 4.$$

Damit also ein Wendepunkt auftreten kann, muss der Lösung gehörige Orbit also $4/3$ oder 4 durchlaufen. Ist nun $x(0) > 4$, so ist die zugehörige Lösung monoton fallend und läuft gegen den stationären Punkt $x = 4$, erreicht diesen allerdings erst für $t \to \infty$. Daher liegt weder 4 noch $4/3$ auf dem zugehörigen Orbit, also hat $x(t)$ keinen Wendepunkt. Ist hingegen $0 < x(0) < 4$, so ist die zugehörige Lösung monoton fallend und läuft gegen den stationären Punkt 0. Ist also $x(0) > 4/3$, so liegt $4/3$ auf dem Orbit der zugehörigen Lösung, die dann einen Wendepunkt hat; im umgekehrten Fall hat $x(t)$ keinen Wendepunkt. Falls $x(0) < 0$, so bleibt die Lösung stets negativ und kann insofern keinen Wendepunkt haben.

(iii) Übertragen Sie die Ergebnisse in ein $(t, x(t))$-Diagramm, indem Sie die Lösungen zu den Anfangswerten $-2, 1, 3, 6$ und den stationären Punkten qualitativ einzeichnen.

Lösung:



Aufgabe 2

Das folgende Modell beschreibt die Ausbreitung ansteckender Krankheiten in einer Population: Sei $I(t)$ der Anteil infizierter Individuen an der Gesamtpopulation zur Zeit t. Die Ansteckungsrate und die Genesungsrate werden als proportional zur Anzahl der Infizierten angenommen. Die Modellgleichung für die relative Anzahl der Infizierten lautet dann

$$\frac{d}{dt}I(t) = I(t)\,(1 - I(t)) - \mu I(t) \text{ mit } \mu > 0.$$

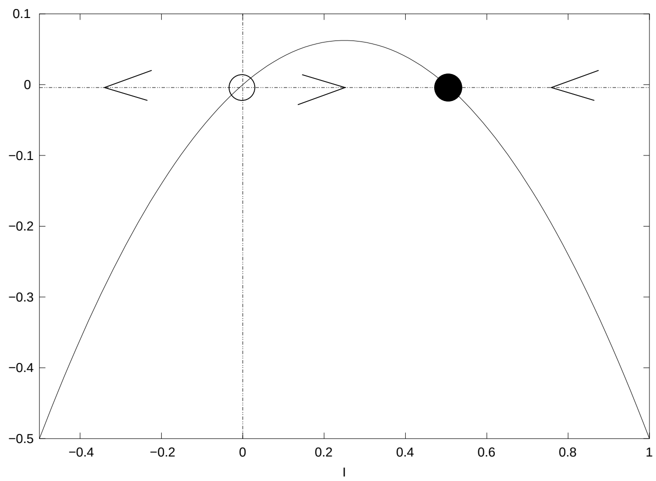
(i) Berechnen Sie die stationären Punkte des Systems und untersuchen Sie deren Stabilität.

Lösung:

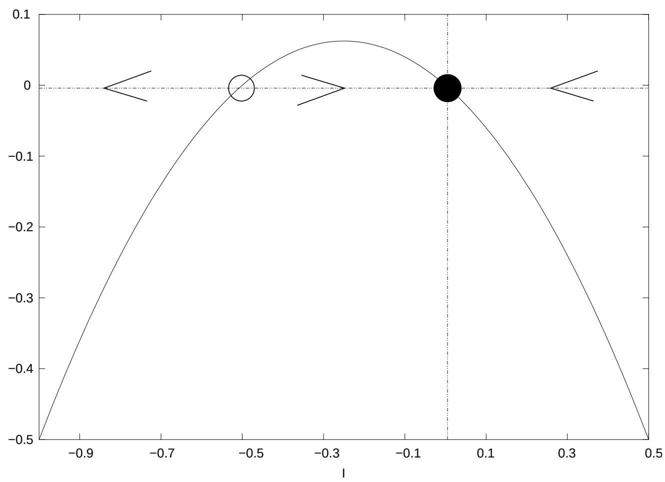
Es gilt

$$I\,(1 - I) - \mu I = 0 \;\Leftrightarrow\; I = 0 \text{ bzw. } I = 1 - \mu$$

Das Stabilitätsverhalten hängt ab vom Vorzeichen der rechten Seite der Differentialgleichung. Ist $\mu < 1$, so ist der nicht-triviale (d.h. von Null verschiedene) stationäre Punkt stabil, der andere instabil, wie folgende Abbildung zeigt:



Ist hingegen $\mu > 1$, so ändert sich das Verhalten wie folgender Abbildung entnommen werden kann. Jetzt ist der triviale stationäre Punkt stabil.



Im Grenzfall $\mu = 1$ lautet die Differentialgleichung $\dot{I} = -I^2$ und der einzige stationäre Punkt $I = 0$ ist instabil.

(ii) Für welche Werte von μ verbleibt die Krankheit in der Population, d.h. wann gilt $\lim_{t\to\infty} I(t) > 0$? Wie kann man μ interpretieren?

Lösung:

Ist $\mu < 1$, so ist der nichttriviale stationäre Punkt stabil. Alle biologisch sinnvollen Lösungen, also alle Lösungen mit $I(0) > 0$ laufen gegen diesen Punkt, es gilt $\lim_{t\to\infty} I(t) = 1 - \mu > 0$. In diesem Fall verbleibt die Krankheit also in der Population. Betrachtet man die Differentialgleichung, so erkennt man die Bedeutung von μ als Genesungsrate. I beschreibt den Anteil der Infizierten an der Population, also $0 \le I(t) \le 1$. Wäre $\mu = 0$, so würde $\dot{I} = I(1 - I)$ immer positiv sein, also irgendwann alle Individuen infiziert. Für $\mu > 0$ hingegen verlassen einige Individuen die Klasse der Infizierten und falls $\mu < 1$ stellt sich ein stabiles Gleichgewicht ein. Je größer μ wird, desto geringer ist im Gleichgewicht der Anteil an Infizierten. Falls $\mu > 1$, so stirbt die Krankheit ganz aus.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie für $t > 0$ eine Stammfunktion $F(t)$ von

(i) $f(t) \;=\; 1 + t + t^4$.

Lösung:

Eine Stammfunktion der Funktion t^n findet sich gemäß Vorlesung als $t^{n+1}/(n+1)$. Also ist

$$F(t) = \frac{1}{0+1}t^{0+1} + \frac{1}{1+1}t^{1+1} + \frac{1}{4+1}t^{4+1} = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{5}t^5$$

eine Stammfunktion von f.

(ii) $f(t) \;=\; \exp(t) + t^{3/2}$.

Lösung:

Eine Stammfunktion von $\exp(t)$ ist $\exp(t)$, daher ist

$$F(t) = \exp(t) + \frac{1}{3/2+1}t^{3/2+1} = \exp(t) + \frac{2}{5}t^{5/2}$$

eine Stammfunktion von f.

(iii) $f(t) \;=\; t^{-2} - 2t^{-1} - 1 + \sqrt{t} + 3.5\;t^{2.5}$.

Lösung:

Es ist $\sqrt{t} = t^{1/2}$ und eine Stammfunktion von t^{-1} ist nach Vorlesung $\ln(t)$, also ist

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{-2+1}t^{-2+1} - 2\ln(t) - t + \frac{1}{1/2+1}t^{1/2+1} + \frac{3.5}{2.5+1}t^{2.5+1} \\ &= -t^{-1} - 2\ln(t) - t + \frac{2}{3}t^{3/2} + t^{3.5} \end{aligned}$$

eine Stammfunktion von f.

(iv) $f(t) \;=\; (5t+4)^3$.

Lösung:

Hier kann man entweder mit Substitutionsregeln arbeiten oder geschickt eine Stammfunktion raten, was wir hier durchführen werden. Versuchen wir in Analogie zu der Formel für t^n die folgende Funktion als Stammfunktion:

$$F(t) = \frac{1}{4}(5t+4)^4.$$

Differenzieren wir $F(t)$ nach t, so folgt mit der Kettenregel

$$\dot{F}(t) = (5t+4)^3 \cdot 5.$$

Die innere Ableitung muss also noch in der Stammfunktion berücksichtigt werden, es folgt

$$F(t) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}(5t+4)^4 = \frac{1}{20}(5t+4)^4$$

und es gilt $\dot{F}(t) = f(t)$, also ist F eine Stammfunktion von f.

(v) $f(t) \;=\; \exp(6t)$.

Lösung:

Eine Stammfunktion von $\exp(t)$ ist bekanntlich $\exp(t)$. Wie oben, muss in der Stammfunktion von $\exp(6t)$ noch die innere Ableitung berücksichtigt werden, also

$$F(t) = \frac{1}{6}\exp(6t).$$

Es gilt $\dot{F}(t) = \exp(6t) = f(t)$, also ist F eine Stammfunktion von f.