MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
9.1.2003

Lösungshinweise zur 9. Übung

http://www.mi.uni-koeln.de/∼mkurth/biologie

Aufgabe 1

Berechnen Sie mittels partieller Integration die folgenden Integrale

(i)

$$\int_1^2 x^3 \ln(x^2)\,\mathrm{d}x\ ,$$

Lösung

Da für die Ableitung vom ln gilt $\ln'(x) = 1/x$ ist es sinnvoll, die Formel für die partielle Integration mit $v(x) = \ln(x^2)$ und $u'(x) = x^3$ anzuwenden. Es gilt

$$v'(x) = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x} \quad \text{und} \quad u(x) = \frac{1}{4}x^4,$$

also

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^3\ln(x^2)\,dx &= \frac{1}{4}x^4\ln(x^2)\Big|_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 \frac{1}{4}x^4\cdot\frac{2}{x}dx = \frac{1}{4}x^4\ln(x^2)\Big|_{x=1}^{x=2} - \int_1^2\frac{1}{2}x^3dx\\ &= \frac{1}{4}x^4\ln(x^2)\Big|_{x=1}^{x=2} - \frac{1}{8}x^4\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{4}2^4\ln(2^2) - \frac{1}{4}1^4\ln(1^2) - (\frac{1}{8}2^4 - \frac{1}{8}1^4)\\ &= 8\ln(2) - 0 - (2-\frac{1}{8}) = 8\ln(2) - \frac{15}{8}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\int_0^1 t^2\exp(-t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

Lösung

Hier ist zweimalige partielle Integration vonnöten, um den Exponenten von t auf 0 zu bringen. Sei dazu $\dot{u}(t) = \exp(-t)$ und $v(t) = t^2$, dann gilt

$$u(t) = -\exp(-t) \quad \text{und} \quad \dot{v}(t) = 2t,$$

also folgt

$$\int_0^1 t^2\exp(-t)dt = -t^2\exp(-t)\Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 -\exp(-t)\cdot 2t dt.$$

Im Integral integrieren wir abermals partiell mit $\dot{u}(t) = \exp(-t)$ und $v(t) = t$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \exp(-t)\cdot t dt &= -\exp(-t)\cdot t\Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 -\exp(-t)\cdot 1 dt\\ &= -\exp(-t)\cdot t\Big|_{t=0}^{t=1} - \exp(-t)\Big|_{t=0}^{t=1}.\end{aligned}$$

Insgesamt gilt dann

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2\exp(-t)dt &= -t^2\exp(-t)\Big|_{t=0}^{t=1} + 2\int_0^1 \exp(-t)\cdot t dt\\ &= -t^2\exp(-t)\Big|_{t=0}^{t=1} + 2\left(-\exp(-t)\cdot t\Big|_{t=0}^{t=1} - \exp(-t)\Big|_{t=0}^{t=1}\right)\\ &= -(t^2+2t+2)\exp(-t)\Big|_{t=0}^{t=1} = -5\exp(-1)+2.\end{aligned}$$

(iii)

$$\int_1^2 \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Lösung

Hier gehen wir wieder wie in (i) vor und setzen $v(x) = \ln(x)$ und $u'(x) = \sqrt{x}$. Dann ist

$$v'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad u(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{x}\ln(x)\ dx &= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x)\Big|_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 \frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x)\Big|_{x=1}^{x=2} - \frac{2}{3}\int_1^2 x^{1/2}dx\\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x)\Big|_{x=1}^{x=2} - \frac{2}{3}\cdot(\frac{2}{3}x^{3/2})\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{2}{3}x^{3/2}\left(\ln(x)-\frac{2}{3}\right)\ \Big|_{x=1}^{x=2}\\ &= \frac{2}{3}\cdot 2^{3/2}\left(\ln(2)-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{2}\left(\ln(2)-\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{9}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Die physikalische Leistung L ist definiert als die momentane Abgabe von Energie pro Zeiteinheit. Sei $E(t)$ die gesamte bis zur Zeit t abgegebene Energie, dann ist also

$$L(t) = \dot{E}(t) \text{ bzw. } E(t) = \int_0^t L(s)\ ds.$$

Nehmen wir nun an, dass die Leistung eines Marathonläufers gemäß der Formel

$$L(t) = \frac{1}{2+\lambda t} \text{ mit } \lambda > 0$$

abnimmt. Wie groß ist dann die gesamte Energie, die er zum Zeitpunkt $t = 1$ abgegeben hat, also $E(1)$?

Lösung

Gesucht ist $E(1)$, genauer

$$E(1) = \int_0^1 L(s)\ ds = \int_0^1 \frac{1}{2+\lambda s}\ ds.$$

Um das Integral zu berechnen, substituieren wir $\lambda s = \tau$ bzw. $s = \tau/\lambda = \varphi(\tau)$. Es gilt

$$\varphi'(\tau) = \frac{1}{\lambda}$$

und

$$\varphi : [0,\lambda] \;\to\; [0,1]$$

Damit gilt dann mit der Substititionsregel

$$\int_0^1 \frac{1}{2+\lambda s}\; ds = \int_0^\lambda \frac{1}{2+\tau}\cdot\frac{1}{\lambda} d\tau$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{2+\tau}$ ist bekanntlich $\ln(2+\tau)$ und es folgt

$$\int_0^1 \frac{1}{2+\lambda s}\; ds = \frac{1}{\lambda}\ln(2+\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(\ln(2+\lambda) - \ln(2)\right).$$

Die zum Zeitpunkt $t=1$ abgebene Energie des Marathonläufers beträgt also $E(1) = \ln(2+\lambda)/\lambda - \ln(2)/\lambda$.

Aufgabe 3

Eine Population entwickele sich gemäß der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -x(t) + (1+\sin(t)), \qquad x(0) = 1.$$

Man kann zeigen, dass sich die Lösung als

$$x(t) = \exp(-t)\left(1 + \int_0^t (1+\sin(s))\exp(s) ds\right)$$

schreiben lässt.

(i) Berechnen Sie $\int_0^t \sin(s)\exp(s) ds$, indem Sie zweimal partiell integrieren.

Lösung

Sei also $u'(s) = \sin(s)$ und $v(s) = \exp(s)$, dann folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^t \sin(s)\exp(s) ds &= -\cos(s)\exp(s)\Big|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t \cos(s)\exp(s) ds \\ &= -\cos(s)\exp(s)\Big|_{s=0}^{s=t} + (\sin(s)\exp(s)\Big|_{s=0}^{s=t} - \int_0^t \sin(s)\exp(s) ds).\end{aligned}$$

Addieren wir auf beiden Seiten der Gleichung $\int_0^t \sin(s)\exp(s) ds$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}2\int_0^t \sin(s)\exp(s) ds &= -\cos(s)\exp(s) + \sin(s)\exp(s)\Big|_{s=0}^{s=t} \\ &= -\cos(t)\exp(t) + \sin(t)\exp(t) + 1,\end{aligned}$$

und damit

$$\int_0^t \sin(s)\exp(s) ds = \frac{1}{2}\exp(t)\left(\sin(t) - \cos(t)\right) + \frac{1}{2}.$$

(ii) Geben Sie mit Hilfe von (i) die Funktion $x(t)$ explizit an und zeigen Sie, dass die Differentialgleichung erfüllt ist.

Lösung

Benutzen wir die Tatsache, dass

$$\int_0^t \exp(s) ds = \exp(s)\Big|_{s=0}^{s=t} = \exp(t) - 1$$

gilt, so ergibt sich mit der angebeben Formel für $x(t)$ und dem Ergebnis aus (i)

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(-t)\left(1+\int_0^t (1+\sin(s))\exp(-s)ds\right) \\ &= \exp(-t)\left(1+\exp(t)-1+\frac{1}{2}\exp(-t)\left(\sin(t)-\cos(t)\right)+\frac{1}{2}\right) \\ &= \exp(-t)\left(\exp(t)+\frac{1}{2}\exp(t)\left(\sin(t)-\cos(t)\right)+\frac{1}{2}\right) \\ &= 1+\frac{1}{2}\left(\sin(t)-\cos(t)\right)+\frac{1}{2}\exp(-t) \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass $x(t)$ die Differentialgleichung erfüllt, dazu überprüfen wir zunächst die Anfangsbedingung

$$x(0) = 1+\frac{1}{2}\left(\sin(0)-\cos(0)\right)+\frac{1}{2}\exp(-0) = 1+\frac{1}{2}(0-1)+\frac{1}{2}\cdot 1 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

Die Anfangsbedingung ist also erfüllt. Um die Differentialgleichung zu überprüfen, muss $x(t)$ differenziert werden:

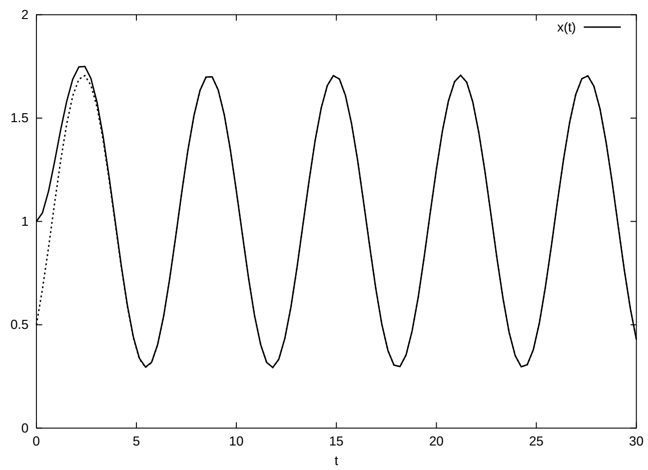
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{2}\left(\cos(t)+\sin(t)\right)-\frac{1}{2}\exp(-t) = -(1+\frac{1}{2}\left(\sin(t)-\cos(t)\right)+\frac{1}{2}\exp(-t))+1+\sin(t) \\ &= -x(t)+a+\sin(t), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

(iii) Skizzieren Sie $x(t)$. Welches Verhalten stellt sich langfristig ein ?

Lösung

Die Gestalt der Lösung kann folgender Abbildung entnommen werden:



Langfristig ist klar, dass $\exp(-t) \to 0$, die Lösung verhält sich also für große Werte von t wie

$$1+\frac{1}{2}\left(\sin(t)-\cos(t)\right),$$

nimmt also keinen Grenzwert an, sondern schmiegt sich an obige Funktion an, welche auch in der Abbildung wiederzufinden ist.

Bemerkung: Dies kann nur bei sogenannten *nichtautonomen* Differenialgleichungen vorkommen, bei denen die rechte Seite explizit von t (hier $1+\sin(t)$) abhängt. Die qualitative Analyse für Differentialgleichungen, die wir bisher studiert haben, funktioniert nur für autonome Differentialgleichungen, also Gleichungen vom Typ $\dot{x}(t) = f(x(t))$.