

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben

<http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie>

Aufgabe 1

Ein mol eines Stoffes entspricht der Menge von $6 \cdot 10^{23}$ Teilchen dieses Stoffes. Für ein Experiment benötigen Sie nun 100 ml einer 2-mol Lösung, also 2 mol pro Liter Wasser. Im Labor finden Sie aber nur einen Liter 10-mol Lösung. Bestimmen Sie die Menge Wasser und die minimale Menge dieser Lösung, die gemischt das gewünschte Ergebnis liefern.

Lösung

Wir benötigen also 100 ml einer 2-mol Lösung. Sei x die Menge der 10-mol Lösung in ml, die wir entnehmen müssen. Dann muss gelten:

$$2\text{mol} \cdot 100\text{ml} = 10\text{mol} \cdot x,$$

also $x = 20$ ml. Dies füllen wir dann noch mit $100 - 20 = 80$ ml auf, und erhalten die gewünschte Menge der 2-mol Lösung.

Aufgabe 2

Das Caesium-Isotop ^{137}Cs ist ein gefährliches Umweltgift, das sich in radioaktiven Niederschlägen befindet. Es verliert pro Jahr 2.3% seiner Masse durch radioaktiven Zerfall. Jedes Jahr gelange die gleiche Masse M dieses Stoffes in die Umwelt.

- (i) Stellen Sie eine Formel auf mit der man berechnen kann, welche Menge des Stoffes nach n Jahren in der Umwelt vorhanden ist. Benutzen Sie hierzu das Summenzeichen und vereinfachen Sie dann die Formel so weit wie möglich.
- (ii) Welches Gleichgewicht wird sich auf Dauer einstellen ($n \rightarrow \infty$) ?

Lösung

- (i) Sei M_n die Masse des Stoffes, die nach n Jahren in der Umwelt ist. Am Anfang ($n = 0$) ist nur die Menge $M_0 = M$ in der Umwelt, nach einem Jahr hat die Anfangsmasse 2.3% ihrer Masse verloren und im Laufe dieses Jahres ist die Masse M in die Umwelt gelangt, es gilt also $M_1 = M + M(1 - 0.023)$. Nach zwei Jahren befindet sich bereits die Masse $M_2 = M + M(1 - 0.023) + M(1 - 0.023)^2$ in der Umwelt, usw. Es gilt also

$$\begin{aligned} M_n &= M + M(1 - 0.023) + M(1 - 0.023)^2 + \dots + M(1 - 0.023)^n \\ &= M \sum_{k=0}^n (1 - 0.023)^k \end{aligned}$$

Es gilt für $0 < q < 1$ (geometrische Reihe, vgl. Aufgabe 3 der 2. Übung):

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Damit ergibt sich als Vereinfachung

$$M_n = M \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für} \quad q := 1 - 0.023 = 0.977.$$

- (ii) Da unser $q < 1$ ist, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ und somit $M_n = M/(1 - q) = M/0.023 \sim 43.478M$.

Aufgabe 3

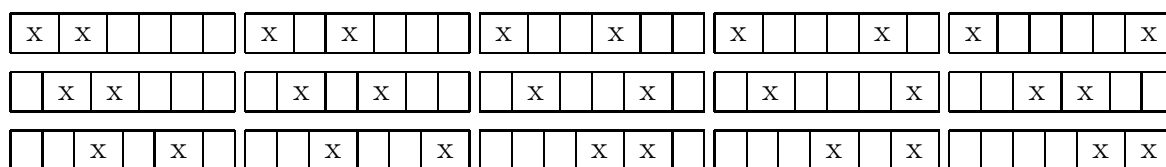
Ein Enzym habe $N = 6$ Bindungsstellen. Auf wie viele verschiedene Weisen können $i = 2$ Bindestellen besetzt werden? Berechnen Sie diesen Wert und fertigen Sie ein schematisches Bild der verschiedenen Enzym-Substrat-Komplexe an. Wie viele verschiedene Komplexe kann dieses Enzym insgesamt bilden ?

Lösung

Gemäß der Formel aus der Vorlesung gilt

$$\text{Anzahl der Möglichkeiten, 2 Bindestellen zu besetzen} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

Die einzelnen Komplexe haben dabei folgende Gestalt:



Bekanntlich berechnet sich die Anzahl der Komplexe die ein Enzym insgesamt bilden kann gemäß Aufgabe 2 der 2. Übung als

$$\sum_{i=0}^N \binom{N}{i} = 2^N,$$

hier also $2^6 = 64$ Möglichkeiten.

Aufgabe 4

Gegeben seien die Funktionen $f(x) = x(x+2)^2$ und $g(x) = (3x+4)^4 - 81x^4$.

- (i) Bestimmen Sie den Grad von f , g , $f+g$ und $f \cdot g$.

Lösung:

Es gilt

$$f(x) = x(x+2)^2 = x(x^2 + 4x + 4) = x^3 + 4x^2 + 4x,$$

also $\text{grad}(f) = 3$. Für g gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= (3x+4)^4 - 81x^4 = (3x+4)^2 \cdot (3x+4)^2 - 81x^4 \\ &= (9x^2 + 24x + 16) \cdot (9x^2 + 24x + 16) - 81x^4 \\ &= 81x^4 + 216x^3 + 144x^2 + 216x^3 + 576x^2 + 384x + 144x^2 + 384x + 256 - 81x^4 \\ &= 432x^3 + 864x^2 + 768x + 256, \end{aligned}$$

also $\text{grad}(g) = 3$.

- (ii) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f/g und g/f .

Lösung:

Die Funktion f/g ist da definiert, wo $g(x) \neq 0$ ist. Dazu kürzen wir die Gleichung $g(x) = 0$ durch 432 und erhalten

$$x^3 + 2x^2 + 16/9x + 16/27 = 0.$$

Die Gestalt der Gleichung legt nahe nach Lösungen der Form $x = y/3$ zu suchen. Substituieren wir dieses, so erhalten wir nach Multiplikation mit $27 = 3^3$:

$$y^3 + 6y^2 + 16y + 16 = 0$$

Eine Lösung lässt sich raten als $y = -2$, denn

$$-8 + 24 - 32 + 16 = 0.$$

Polynomdivision liefert

$$y^3 + 6y^2 + 16y + 16 = (y + 2) \cdot (y^2 + 4y + 8)$$

und wegen $y^2 + 4y + 8 > 0$ existieren keine weiteren Nullstellen, also folgt

$$\mathcal{D}(f/g)\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2/3\} = \mathbb{R} \setminus \{-2/3\}.$$

Die Nullstellen von f findet man einfacher. Es ist

$$f(x) = x(x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = -2,$$

also

$$\mathcal{D}(g/f)\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, x \neq -2\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}.$$

(iii) Wie verhält sich f/g bzw. g/f für $x \rightarrow \infty$?

Aufgabe 5

Bei Ausgrabungen in der Kölner Altstadt wurde kürzlich ein Fossil gefunden, bei dem das Verhältnis von C^{14} und C^{12} auf 60% von c_0 gesunken war. Wie alt war das Fossil zum Zeitpunkt der Ausgrabung? Verwenden Sie dazu die C^{14} -Methode zur Altersbestimmung (vgl. Aufgabe 3, 6. Übung).

Lösung:

Sei t_0 das Alter des Fossils zum Zeitpunkt der Ausgrabung. Wir wenden das Zerfallsgesetz an und erhalten

$$\begin{aligned} c_0 \exp(-\sigma t_0) &= 0.6c_0 = \frac{3}{5}c_0 \\ \Leftrightarrow \exp(-\sigma t_0) &= \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow -\sigma t_0 &= \ln(3/5) \\ \Leftrightarrow t_0 &= -\frac{\ln(3/5)}{\sigma}. \end{aligned}$$

Allerdings ist die Zerfallskonstante σ noch unbekannt, diese berechnet sich aus der bekannten Halbwertszeit von 5760 Jahren wie folgt:

$$\begin{aligned} \exp(-5760\sigma) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -5760\sigma &= \ln(1/2) = -\ln(2) \\ \Leftrightarrow \sigma &= \frac{\ln(2)}{5760}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$t_0 = -5760 \frac{\ln(3/5)}{\ln(2)} \sim 4244.9218$$

Das Fossil ist also knapp 4245 Jahre alt. **Aufgabe 6**

Geben Sie jeweils die erste Ableitung und den Definitionsbereich der Funktionen an:

(i) $f_1(x) = \sqrt{\exp(x)}$

Lösung:

Es gilt $\exp(x) > 0$, also $\mathcal{D}(f_1) = \mathbb{R}$. Die erste Ableitung berechnet sich wie folgt:

$$f_1'(x) = \frac{\exp(x)}{2\sqrt{\exp(x)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\exp(x)}.$$

(ii) $f_2(x) = x/\sin(x^2)$

Lösung:

Es gilt

$$\sin(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{k\pi}, \quad k \in \mathbb{N},$$

also

$$\mathcal{D}(f_2) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm\sqrt{k\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}\}$$

. Für $x \in \mathcal{D}(f_2)$ berechnet sich dann die Ableitung als

$$f_2'(x) = \frac{\sin(x^2) - 2x^2 \cos(x^2)}{(\sin(x^2))^2}.$$

(iii) $f_3(x) = \sin(x)/\cos(x)$.

Lösung:

Zur Bestimmung des Definitionsbereiches betrachte die Nullstellen von $\cos(x)$, also

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

also

$$\mathcal{D}(f_3) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi/2 + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

. Für $x \in \mathcal{D}(f_3)$ berechnet sich dann die Ableitung als

$$f_3'(x) = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2.$$

Es gilt übrigens $f_3(x) = \tan(x)$.

(iv) $f_4(x) = \ln(x^2)$

Lösung:

Wegen $x^2 > 0$ für $x \neq 0$ gilt

$$\mathcal{D}(f_4) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

. Für $x \neq 0$ berechnet sich die Ableitung dann gemäß

$$f_4'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}.$$

Aufgabe 7

Experimentelle Messungen haben gezeigt, dass der Energieverbrauch eines Wellensittichs beim Fliegen in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit v näherungsweise durch folgende Formel gegeben ist

$$E(v) = \frac{1}{v} (0.01(v - 20)^2 + 21).$$

Dabei wird E in Kalorien pro g Körpergewicht pro km Flugstrecke gemessen und die Geschwindigkeit in km/h . Man geht dabei davon aus, dass $v \geq 10$, da der Wellensittich sonst abstürzt. Bei welcher Geschwindigkeit ist der Energieverbrauch minimal?

Lösung:

Um das Minimum von f zu bestimmen, müssen wir die Nullstellen der Ableitung finden:

$$\begin{aligned} E'(v) &= -\frac{1}{v^2} (0.01(v-20)^2 + 21) + \frac{1}{v} (0.02(v-20)) = 0 \\ \Leftrightarrow & - (0.01(v-20)^2 + 21) + v(0.02(v-20)) = 0 \\ \Leftrightarrow & - (0.01(v^2 - 40v + 400) + 21) + (0.02v^2 - 0.4v) = 0 \\ \Leftrightarrow & 0.01v^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow v^2 = 2500 \Leftrightarrow v = \pm\sqrt{2500} = \pm 50. \end{aligned}$$

Natürlich interessieren hier nur positive Geschwindigkeiten, also $v = 50km/h$ ist ein Kandidat für die Geschwindigkeit mit minimalem Energieverbrauch. Ob es wirklich ein Minimum ist klärt sich nach Inspektion der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} E''(v) &= \left(\frac{-(0.01(v-20)^2 + 21) + (0.02v(v-20))}{v^2} \right)' \\ &= \left(\frac{0.01v^2 - 25}{v^2} \right)' \\ &= \left(0.01 - \frac{25}{v^2} \right)' \\ &= 2\frac{25}{v^3} > 0, \end{aligned}$$

also liegt bei $v = 50km/h$ tatsächlich minimaler Energieverbrauch vor. Der zugehörige Wert ist $E(50) = 0.6$.

Aufgabe 8

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit der Schwingungsgleichung

$$\ddot{x}(t) = -k^2 x(t),$$

welche eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. Zeigen Sie, dass

$$x(t) = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt)$$

für beliebige Konstanten C_1 und C_2 die Gleichung löst. Falls die Anfangsbedingungen als $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = -1$ gegeben sind, wie lautet die Lösung?

Lösung:

Um nachzuweisen, dass $x(t)$ die Schwingungsgleichung löst, müssen wir die zweite Ableitung von $x(t)$ berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= k(C_1 \cos(kt) - C_2 \sin(kt)) \\ \text{und } \ddot{x}(t) &= -k^2(C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt)) = -k^2 x(t), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. Sind die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = -1$ gegeben, so muss gelten

$$1 = x(0) = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = C_2 \text{ und } -1 = \dot{x}(0) = k(C_1 \cos(0) - C_2 \sin(0)) = kC_1,$$

also lautet die Lösung zu obigen Anfangsbedingungen

$$x(t) = -\frac{1}{k} \sin(kt) + \cos(kt).$$

Aufgabe 9

Vorgelegt sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = (x - 1)(x - 3), \quad x(0) = C.$$

(i) Zeigen Sie, dass

$$x(t) = 1 + 2 \frac{1 - C}{\exp(2t)(C - 3) + 1 - C}$$

die Differentialgleichung löst.

Lösung:

Um zu zeigen, dass $x(t)$ die Differentialgleichung löst, differenzieren wir

$$\dot{x}(t) = -2 \frac{1 - C}{(\exp(2t)(C - 3) + 1 - C)^2} \cdot 2(C - 3) \exp(2t)$$

Die rechte Seite schreibt sich als

$$\begin{aligned} (x(t) - 1)(x(t) - 3) &= 2 \frac{1 - C}{\exp(2t)(C - 3) + 1 - C} \left(2 \frac{1 - C}{\exp(2t)(C - 3) + 1 - C} - 2 \right) \\ &= 2(1 - C) \cdot \frac{2(1 - C) - 2(\exp(2t)(C - 3) + 1 - C)}{(\exp(2t)(C - 3) + 1 - C)^2} \\ &= 2(1 - C) \cdot \frac{2(1 - C) - 2(\exp(2t)(C - 3) + 1 - C)}{(\exp(2t)(C - 3) + 1 - C)^2} \\ &= -4(1 - C) \cdot \frac{(\exp(2t)(C - 3))}{(\exp(2t)(C - 3) + 1 - C)^2} = \dot{x}(t), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. Setzen wir $t = 0$, so erkennen wir, dass

$$x(0) = 1 + 2 \frac{1 - C}{2} = C$$

gilt, also ist die Anfangsbedingung ebenfalls erfüllt.

(ii) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $x(t)$.

Lösung:

Die Funktion x ist überall dort definiert, wo der Nenner verschieden von Null ist. Es gilt für $C \neq 3$ (für $C = 3$ ist der Nenner stets $1 - C = -2 \neq 0$):

$$\exp(2t)(C - 3) + 1 - C = 0 \Leftrightarrow \exp(2t) = \frac{C - 1}{C - 3}.$$

Die letzte Gleichung kann nur erfüllt sein, falls $(C - 1)/(C - 3) > 0$, also entweder $C < 1$ oder $C > 3$. In diesem Fall folgt dann

$$t = t^* = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{C - 1}{C - 3} \right).$$

Zusammenfassend haben wir gesehen, dass

$$\begin{aligned} 1 \leq C \leq 3 : \mathcal{D}(x(t)) &= \mathbb{R} \\ C < 1 \text{ oder } C > 3 : \mathcal{D}(x(t)) &= \mathbb{R} \setminus \{t^* = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{C - 1}{C - 3} \right)\}, \end{aligned}$$

(iii) Für welche Werte von C existiert der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ und wie lautet dieser ?

Lösung:

Im letzten Aufgabenteil haben wir gesehen, dass die Lösung für $C < 1$ oder $C > 3$ nur bis zur Zeit t^* existiert. Dabei ist t^* für $C < 1$ negativ, also existiert der Grenzwert für $t \rightarrow \infty$. Im Fall $C > 3$ ist t^* positiv und die Lösung existiert nur bis zu dieser Zeit. Für $C < 3$ existiert die Lösung also für alle $t \in \mathbb{R}$, dann läuft der Nenner gegen $\pm\infty$ abhängig vom Wert von C , jedenfalls nähert sich der Bruch demnach Null an und es folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1.$$

Aufgabe 10

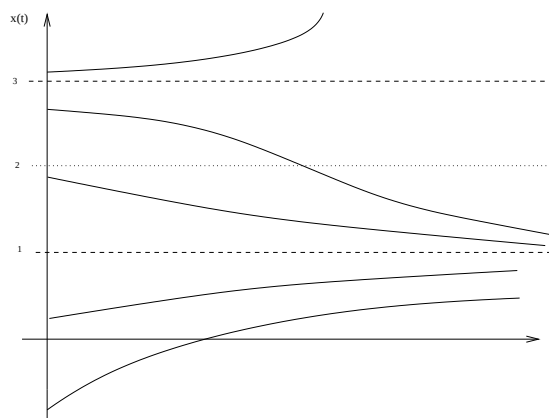
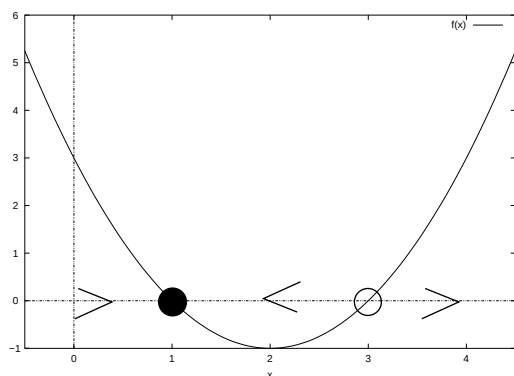
Führen Sie wie in Aufgabe 1 der 10. Übung eine qualitative Analyse der Differentialgleichung aus der vorigen Aufgabe, also $\dot{x} = (x-1)(x-3)$ durch und vergleichen Sie die hier erzielten Ergebnisse mit denen aus der vorigen Aufgabe.

Lösung:

Sei also $f(x) = (x-1)(x-3)$, dann sind 1 und 3 die Nullstellen von f und somit die stationären Punkte der Gleichung. Für $x < 1$ oder $x > 3$ ist $f(x) > 0$, im umgekehrten Fall ist f negativ. Damit ist klar, dass der stationäre Punkt $x = 1$ stabil ist während $x = 3$ instabil ist, vgl. untenstehende Abbildung. Weiter ist klar, dass die Lösungen für $x(0) < 3$ immer gegen den stationären Punkt $x = 1$ laufen, während sie für $C > 3$ in endlicher oder unendlicher Zeit gegen $+\infty$ laufen. Bleibt noch zu untersuchen, ob Wendepunkte existieren: Dazu berechnen wir die Nullstelle von $f'(x)$:

$$f'(x) = (x^2 - 4x + 3)' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Demnach besitzen alle Lösungen mit Startwerten zwischen 2 und 3 einen Wendepunkt und zwar zu der Zeit, wo $x(t) = 2$ gilt. Man vergleiche dazu das $(t, x(t))$ -Diagramm.

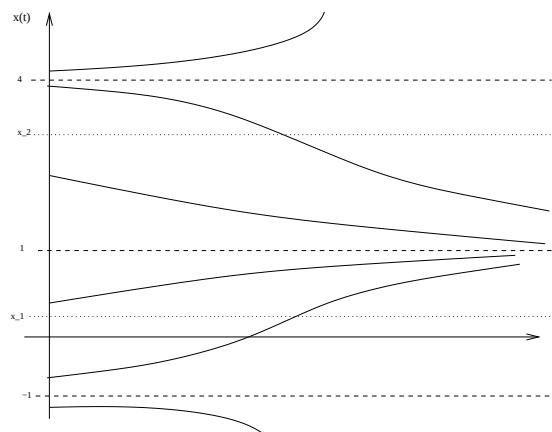
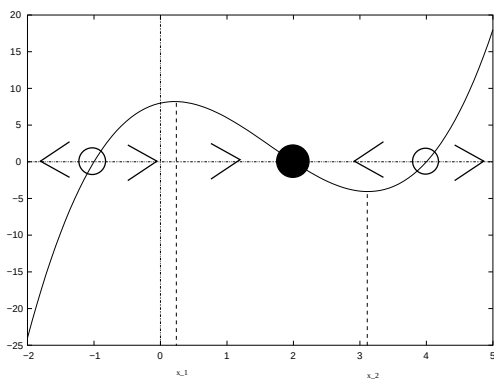


Aufgabe 11

Vorgelegt sei die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$. Die Gestalt von f kann dabei folgender Zeichnung entnommen werden. Tragen Sie die stationären Punkte und deren Stabilität sowie die Richtungspfeile der Evolution in das Diagramm ein. Übertragen Sie dann die Ergebnisse in eine $(t, x(t))$ -Diagramm.

Lösung:

Ein Blick auf die Skizze von f zeigt, dass es drei stationäre Punkte gibt: $x = -1$, $x = 1$ und $x = 4$. Das Maximum x_1 und das Minimum x_2 von f korrespondieren zu Wendepunkten der Lösung, vgl. folgende Abbildung:



Aufgabe 12

Berechnen Sie die folgenden Integrale

(i)

$$\int_1^5 \frac{1}{r^3} dr$$

Lösung

Eine Stammfunktion von $1/r^3 = r^{-3}$ ist $F(r) = -1/2r^{-2}$, es folgt

$$\int_1^5 \frac{1}{r^3} dr = -1/2r^{-2} \Big|_{r=1}^{r=5} = -\frac{1}{25^2} + \frac{1}{2} = \frac{5^2 - 1}{25^2} = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}.$$

(ii)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) dt$$

Lösung

Eine Stammfunktion von $\cos(2t)$ ist $F(t) = \sin(2t)/2$, wie man durch Ableiten leicht sieht. Damit folgt

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) dt = \frac{\sin(2t)}{2} \Big|_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = \frac{\sin(\pi)}{2} - \frac{\sin(-\pi)}{2} = 0.$$

(iii)

$$\int_1^2 \ln(t) \sqrt{t} dt$$

Lösung

Hier ist partielle Integration gefragt, sei $u'(t) = \sqrt{t}$ und $v(t) = \ln(t)$, dann ist

$$u(t) = \frac{2}{3} t^{3/2}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{x} \ln(x) dx &= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln(x) \Big|_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 \frac{2}{3} x^{3/2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln(x) \Big|_{x=1}^{x=2} - \frac{2}{3} \int_1^2 x^{1/2} dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln(x) \Big|_{x=1}^{x=2} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{2}{3} x^{3/2} \left(\ln(x) - \frac{2}{3} \right) \Big|_{x=1}^{x=2} \\ &= \frac{2}{3} \cdot 2^{3/2} \left(\ln(2) - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \sqrt{2} \left(\ln(2) - \frac{2}{3} \right) + \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

(iv)

$$\int_0^\pi \cos(t) \exp(2t) dr$$

Lösung

Hier ist eine kleine Falle eingebaut, die Integrationsvariable ist r . Die zu integrierende Funktion ist konstant in r , also

$$\int_0^\pi \cos(t) \exp(2t) dr = \pi \cos(t) \exp(2t).$$

Wäre hier über t integriert worden, so hätte zweimalige partielle Integration zum Ziel geführt.

(v)

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{ax^2 + b}} dx \text{ mit } a, b > 0$$

Lösung

In diesem Aufgabenteil ist Substitution gefragt. Sei $\tau = ax^2$, dann ist

$$x = \sqrt{\tau/a} =: \varphi(\tau).$$

Ferner gilt

$$\varphi'(\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\tau/a}} > 0 \text{ für } x > 0.$$

und

$$\varphi : [0, a] \rightarrow [0, 1].$$

Damit gilt dann mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{ax^2 + b}} dx &= \int_0^a \frac{\sqrt{\tau/a}}{\sqrt{a(\tau/a) + b}} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\tau/a}} d\tau \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\tau + b}} d\tau \\ &= \frac{1}{2a} \cdot 2\sqrt{\tau + b} \Big|_{\tau=0}^{\tau=a} \\ &= \frac{1}{a} \left(\sqrt{a + b} - \sqrt{b} \right) \end{aligned}$$