MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
7.2.2003

Lösungshinweise zur Klausur

http://www.mi.uni-koeln.de/∼mkurth/biologie

Aufgabe 1

(i) Für ein Experiment benötigen Sie 100 ml 10%-igen Alkohol, im Labor finden Sie aber nur einen Liter 50%-igen Alkohol. Bestimmen Sie die Menge Wasser und die minimale Menge des Alkohols, die gemischt das gewünschte Ergebnis liefern.

Lösung:

Sei x die benötigte Menge des Alkohols, dann muss gelten

$$x = 100 \text{ ml} \cdot 10\% = 10 \text{ ml}.$$

Man benötigt also insgesamt $10ml$ Alkohol, diesen erhält man aus dem 50%-igem Alkohol, wie folgt: Sei y die Menge, die entnommen werden muss, also

$$y \cdot 50\% = 10 \text{ ml},$$

also $y = 20$ ml. Man muss also 20 ml des 50%-igem Alkohol entnehmen und dies mit 80 ml Wasser auffüllen um die gewünschte Lösung zu erzielen.

(ii) Eine Bakterienkultur wird der Masse M_0 zum Zeitpunkt $n = 0$ in eine Nährlösung gegeben. Sie vermehre sich täglich um 10%. Zu wissenschaftlichen Testzwecken wird aber auch in täglichen Abständen beginnend am ersten Tag ($n = 1$) die Menge M entnommen.

- Wie groß ist die Masse der Bakterien nach 3 Tagen ?.

  Lösung:

  Am Anfang ist die Menge M_0. Am ersten Tag hat sie sich um 10% vermehrt, und es wird die Menge M entnommen, d.h.

  $$M_1 = M_0 + 0.1M_0 - M = 1.1M_0 - M$$

  Nach zwei Tagen gilt dann

  $$M_2 = 1.1M_1 - M = 1.1(1.1M_0 - M) - M = 1.1^2M_0 - 1.1M - M.$$

  Und nach drei Tagen folgt

  $$\begin{aligned} M_3 &= 1.1M_2 - M = 1.1(1.1^2M_0 - 1.1M - M) \\ &= 1.1^3M_0 - 1.1^2M - 1.1M - M = 1.331M_0 - 3.31M \end{aligned}$$

- Wie hoch muss die tägliche Entnahme sein, damit die Menge der Bakterien konstant bleibt ?

  Lösung:

  Es genügt M so zu bestimmen, dass $M_1 = M_0$. Dann folgt induktiv $M_n = M_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

  $$M_1 = M_0 \;\Leftrightarrow\; 1.1M_0 - M = M_0 \;\Leftrightarrow\; M = 0.1M_0.$$

Aufgabe 2

Gegeben seien die Funktionen $f(x) = x^4 + 2x^2$ und $g(x) = x^4 - 1$.

(i) Bestimmen Sie den Grad von $f \cdot g$ sowie von $f - g$.

Lösung:

Es ist

$$f(x) \cdot g(x) = (x^4 + 2x^2)(x^4 - 1) = x^8 + 2x^6 - x^4 - 2x^2.$$

Die größte vorkommende Potenz ist 8, also folgt für den Grad von $f \cdot g$:

$$\mathrm{grad}(f \cdot g) = 8.$$

Weiter ist $f(x) - g(x) = 2x^2 - 1$, der Grad ist also 2.

(ii) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f/g sowie von g/f.

Lösung:

Die Funktionen sind jeweils da nicht definiert, wo der Nenner verschwindet. Es gilt:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ und } g(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 1,$$

also

$$\mathcal{D}(g/f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\},$$
$$\mathcal{D}(f/g) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\}.$$

(iii) Wie verhalten sich f/g bzw. g/f für $x \to \infty$?

Lösung:

Gemäß der Formel aus der Vorlesung gilt

$$\lim_{x\to\infty} (f/g) = \lim_{x\to\infty} (g/f) = 1,$$

da der Grad des Zählerpolynoms gleich dem des Nennerpolynoms ist und die entsprechenden Koeffizienten beide gleich 1 sind.

(iv) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von $g(x)$.

Lösung:

Wir berechnen die Ableitung von g:

$$g'(x) = 4x^3$$

Dies ist positiv, falls $x > 0$ ist und negativ fall $x < 0$. Damit folgt

$$g(x) \text{ ist } \begin{cases} \text{monoton steigend für} & x > 0 \\ \text{monoton fallend für} & x < 0 \end{cases}$$

(v) Berechnen Sie, falls möglich, die Umkehrfunktion von $g(x)$ für $x > 0$.

Lösung:

Die Umkehrfunktion von g existiert wegen $g'(x) > 0$ für $x > 0$. Setzen wir zu deren Berechnung $g(x) = t$, so folgt

$$t = x^4 - 1 \;\Leftrightarrow\; x = (1+t)^{1/4}.$$

Die Umkehrfunktion lautet also $g^{-1}(t) = (1+t)^{1/4}, t > -1$.

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe wird die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = t \cdot \exp(-2x(t)),$$

betrachtet.

(i) Zeigen Sie durch Differenzieren, dass

$$x(t) = \frac{1}{2}\ln(t^2 + C)$$

für beliebige Konstanten $C > 0$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Lösung:

Differenzieren wir $x(t)$ nach t, so ergibt sich

$$\dot{x}(t) = \frac{t}{t^2 + C}.$$

Setzen wir $x(t)$ in die rechte Seite ein, so folgt

$$\begin{aligned} t \cdot \exp(-2x(t)) &= t \cdot \exp(-\ln(t^2 + C)) \\ &= \frac{t}{\exp(\ln(t^2 + C))} \\ &= \frac{t}{t^2 + C} = \dot{x}(t), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

(ii) Bestimmen Sie die Konstante C so, das die Anfangsbedingung $x(1) = 0$ erfüllt ist.

Lösung:

Setzen wir $t = 1$ ein, so folgt

$$\begin{aligned} x(1) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\ln(1^2 + C) = 0 \\ &\Leftrightarrow\; 1 + C = \exp(0) = 1 \\ &\Leftrightarrow\; C = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Vorgelegt sei die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$. Die Gestalt von f kann dabei folgender Zeichnung entnommen werden:

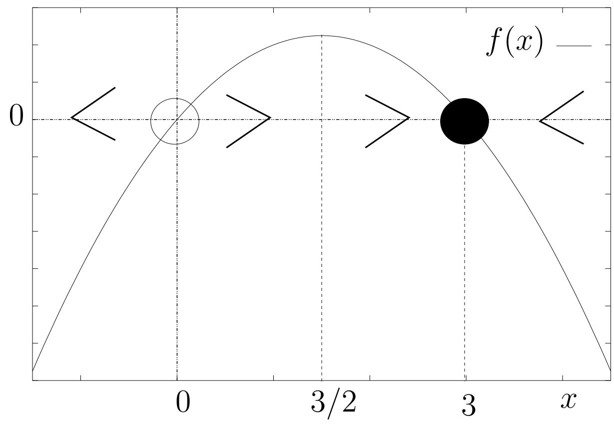
(i) Führen Sie zunächst eine komplette qualitative Analyse der Differentialgleichung durch, bestimmen Sie also

- das Monotonieverhalten,
- die stationären Punkte und deren Stabilität,
- das Grenzverhalten für $t \to \infty$.

Tragen Sie die stationären Punkte und deren Stabilität sowie die Richtungspfeile der Evolution zusammen mit f in ein Diagramm ein. Übertragen Sie dann die Ergebnisse in ein $(t, x(t))$-Diagramm.

Lösung:

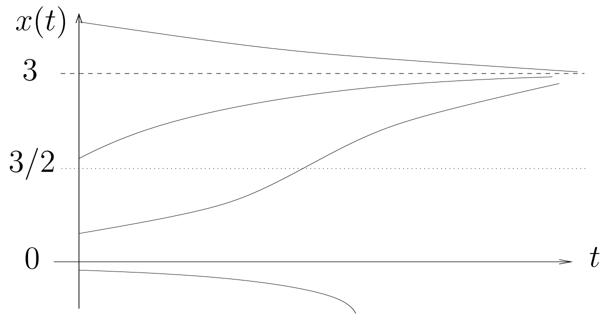
Die stationären Punkte sind die Nullstellen von f, also $x = 0$ und $x = 3$. Dabei ist $x = 3$ stabil, der andere instabil.



Die Lösungen mit Anfangswerten zwischen 0 und 3 sind monoton steigend, die anderen fallen monoton.

Die Lösungen mit positiven Anfangswerten konvergieren alle gegen den stabilen stationären Punkt $\overline{x} = 3$, während diejenigen mit negativen Anfangswerten gegen $-\infty$ laufen.

Bei $x = 3/2$ liegt offenbar ein Maximum von f vor. Falls die Lösung diesen Wert überstreicht, so hat sie dort einen Wendepunkt, vgl. das $(t, x(t))$-Diagramm.



(ii) Besitzt die Lösung zu der Anfangsbedingung $x(0) = 1/2$ einen Wendepunkt?

Lösung:

Die Lösung, die bei 1/2 startet, konvergiert gegen den stationären Punkt $x = 3$. Daher muss sie irgendwann den Wert 3/2 annehmen, zu dieser Zeit ändert sie ihr Krümmungsverhalten, besitzt also einen Wendepunkt.

Aufgabe 5

Berechnen Sie mit partieller Integration das Integral

$$\int_0^2 (x+2)^2 \ln(x+2)dx.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung:

Wir setzen $u'(x) = (x+2)^2$ und $v(x) = \ln(x+2)$. Dann ist

$$u(x) = \frac{1}{3}(x+2)^3$$

eine Stammfunktion von u. Die Formel für partielle Integration liefert dann mit

$$v'(x) = \frac{1}{x+2}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (x+2)^2 \ln(x+2)dx &= \frac{1}{3}(x+2)^3 \ln(x+2)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{3}(x+2)^3 \frac{1}{x+2} dx \\
&= \frac{4^3}{3}\ln(4) - \frac{2^3}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\int_0^2 (x+2)^2 dx \\
&= \frac{64}{3}\ln(4) - \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(x+2)^3\Big|_0^2 \\
&= \frac{64}{3}\ln(4) - \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{9}(4^3 - 2^3) \\
&= \frac{64}{3}\ln(4) - \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{9}(64-8) \\
&= \frac{64\ln(4) - 8\ln(2)}{3} - \frac{56}{9}.
\end{aligned}$$

Benutzt man jetzt noch $\ln(4) = 2\ln(2)$, so folgt

$$\int_0^2 (x+2)^2 \ln(x+2)dx = 40\ln(2) - \frac{56}{9}.$$

Aufgabe 6

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2x(t)}, x(0) = 1$$

mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen.

Lösung:

Sei $f(x) = 1/(2x)$. Gesucht ist dann zunächst eine Stammfunktion F von $1/f$. Die Lösung $x(t)$ erhält man dann nach Vorlesung, indem man die Gleichung $F(x(t)) - F(x(0)) = t$ für $t > 0$ nach $x(t)$ auflöst.

Offenbar ist

$$\frac{1}{f(x)} = 2x,$$

und somit ist

$$F(x) = x^2$$

die gesuchte Stammfunktion. Zu lösen ist nun also die Gleichung

$$x(t)^2 - x(0)^2 = t.$$

Wir suchen die Lösung mit $x(0) = 1$, damit folgt

$$\begin{aligned} x(t)^2 - 1^2 = t \;&\Leftrightarrow\; x(t)^2 = t + 1 \\ &\Leftrightarrow\; x(t) = \pm\sqrt{t+1} \end{aligned}$$

Wegen der Anfangsbedingung sind wir aber nur an der positiven Lösung interessiert, also folgt

$$x(t) = \sqrt{t+1}.$$

Dies verifizieren wir noch, es ist $x(0) = 1$ und

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}} = \frac{1}{2x(t)},$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 7

Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y, z) = x^2 + x(1 - \exp(y)) + z^2 \text{ mit } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

(i) Bestimmen Sie den Gradienten von h, also grad $h(x, y, z)$.

Lösung:

Der Gradient von h ist der Vektor der partiellen Ableitungen. Berechnen wir zunächst die partielle Ableitung nach x. Dazu betrachten wir y und z als feste Parameter und differenzieren die Funktion nach x. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z) = 2x + 1 - \exp(y).$$

Analog folgt

$$\frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z) = -x \exp(y) \text{ und } \frac{\partial}{\partial z} h(x, y, z) = 2z.$$

Demach gilt für den Gradienten

$$\text{grad } h(x, y, z) = (2x + 1 - \exp(y), -x \exp(y), 2z)$$

(ii) Für welche $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt grad $h(x, y, z) = (0, 0, 0)$?

Lösung:

Zu lösen sind also die drei Gleichungen

$$2x + 1 - \exp(y) = 0, \quad -x \exp(y) = 0, \; 2z = 0$$

Aus der letzten Gleichung folgt $z = 0$ und aus der vorletzten lässt sich $x = 0$ folgern. Damit wird die erste Gleichung zu $1 - \exp(y) = 0$, also $y = 0$. Der Gradient ist also genau dann gleich $(0, 0, 0)$ wenn $x = 0, y = 0, z = 0$ gilt.

(iii) Es sei nun eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(y, z) := h(1, y, z).$$

Berechnen und skizzieren Sie die Lösungsmenge von $f(y, z) = 0$.

Lösung:

Es gilt

$$f(y, z) = h(1, y, z) = 1 + (1 - \exp(y)) + z^2 = 2 - \exp(y) + z^2.$$

Damit folgt dann

$$f(y, z) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 - \exp(y) + z^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \pm\sqrt{\exp(y) - 2}.$$

Die Lösungsmenge lautet also

$$\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : z = \pm\sqrt{\exp(y) - 2}\}.$$

Insbesondere muss $y \geq \ln(2)$ gelten, vgl. die Skizze