

## 10. Übung zu Mathematik für Biologen I

<http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie>

### Aufgabe 1

Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = x(t)(1 - x(t)) \exp(x(t)) \text{ mit } x(0) > 0.$$

Man schreibt bekanntlich auch oft kurz  $\dot{x} = f(x)$  mit

$$f(x) = x(1 - x) \exp(x).$$

Führen Sie eine komplette qualitative Analyse der Differentialgleichung durch, bestimmen Sie also

- das Monotonieverhalten,
- die stationären Punkte und deren Stabilität,
- das Grenzverhalten für  $t \rightarrow \infty$ ,
- die Existenz von Wendepunkten.

Zeichnen Sie dazu den Graphen von  $f$  qualitativ, geben Sie die stationären Punkte und deren Stabilität an, und tragen Sie die Richtungspfeile der Evolutionen ein. Übertragen Sie die Ergebnisse weiter in ein  $(t, x(t))$ -Diagramm.

Was ändert sich, falls  $f$  durch  $\tilde{f}(x) = x(1 - x)$  ersetzt wird ?

### Aufgabe 2

Vorgelegt sei die Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  mit  $f(x) = x - 1$ , also

$$\dot{x}(t) = x(t) - 1, \quad x(0) = x_0$$

Lösen Sie diese zum Anfangswert  $x_0 = 2$  explizit mit der Methode der Separation der Variablen. Bestätigen Sie durch Einsetzen, dass die gefundene Lösung tatsächlich die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung erfüllt.

**Hinweis:** Bestimmen Sie zunächst eine Stammfunktion  $F$  von  $1/f$ . Die Lösung  $x(t)$  erhält man dann nach Vorlesung, indem man die Gleichung  $F(x(t)) - F(x(0)) = t$  für  $t > 0$  nach  $t$  auflöst.

### Aufgabe 3

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = (x(t) - 2)^2, \quad x(0) = x_0$$

mittels Separation der Variablen für  $x_0 = 3$  und  $x_0 = 1$ . Welches Verhalten stellt sich für  $t \rightarrow \infty$  ein ? Führen Sie ebenfalls eine qualitative Analyse der Gleichung wie in Aufgabe 1 durch und vergleichen Sie die Ergebnisse.

**Abgabe in den jeweiligen Übungsstunden am 9.1.2003 bzw. 10.1.2003.  
Ihnen alle frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr !**