MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
19.12.2002

10. Übung zu Mathematik für Biologen I

http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie

Aufgabe 1

Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = x(t)(1 - x(t)) \exp(x(t)) \text{ mit } x(0) > 0.$$

Man schreibt bekanntlich auch oft kurz $\dot{x} = f(x)$ mit

$$f(x) = x(1 - x) \exp(x).$$

Führen Sie eine komplette qualitative Analyse der Differentialgleichung durch, bestimmen Sie also

- das Monotonieverhalten,
- die stationären Punkte und deren Stabilität,
- das Grenzverhalten für $t \to \infty$,
- die Existenz von Wendepunkten.

Zeichnen Sie dazu den Graphen von f qualitativ, geben Sie die stationären Punkte und deren Stabilität an, und tragen Sie die Richtungspfeile der Evolutionen ein. Übertragen Sie die Ergebnisse weiter in ein $(t, x(t))$-Diagramm.

Was ändert sich, falls f durch $\tilde{f}(x) = x(1 - x)$ ersetzt wird ?

Aufgabe 2

Vorgelegt sei die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ mit $f(x) = x - 1$, also

$$\dot{x}(t) = x(t) - 1, \; x(0) = x_0$$

Lösen Sie diese zum Anfangswert $x_0 = 2$ explizit mit der Methode der Separation der Variablen. Bestätigen Sie durch Einsetzen, dass die gefundene Lösung tatsächlich die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung erfüllt.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst eine Stammfunktion F von $1/f$. Die Lösung $x(t)$ erhält man dann nach Vorlesung, indem man die Gleichung $F(x(t)) - F(x(0)) = t$ für $t > 0$ nach t auflöst.

Aufgabe 3

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = (x(t) - 2)^2, \; x(0) = x_0$$

mittels Separation der Variablen für $x_0 = 3$ uns $x_0 = 1$. Welches Verhalten stellt sich für $t \to \infty$ ein ? Führen Sie ebenfalls eine qualitative Analyse der Gleichung wie in Aufgabe 1 durch und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Abgabe in den jeweiligen Übungsstunden am 9.1.2003 bzw. 10.1.2003.
Ihnen alle frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr !