MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
9.1.2002

11. Übung zu Mathematik für Biologen I

http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe wollen wir das folgende Additionstheorem beweisen

$$\sin(t+s) = \sin(t)\cos(s) + \sin(s)\cos(t) \text{ für } s, t \in \mathbb{R}.$$

Dazu definieren wir bei festem $s \in \mathbb{R}$ die Funktionen

$$x_1(t) := \sin(t+s) \text{ und } x_2(t) := \sin(t)\cos(s) + \sin(s)\cos(t).$$

Zeigen Sie zunächst, dass x_1 und x_2 beide die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x}(t) = -x(t)$$

zu denselben Anfangsdaten $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ lösen. Folgern Sie dann mit Hilfe der eindeutigen Lösbarkeit der zugehörigen Angangswertaufgabe obiges Additionstheorem.

Aufgabe 2

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$:

(i) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < \exp(1), x_2 = \ln(x_1)\}$,

(ii) $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u-1)^2 + (v-2)^2 \leq 3\}$,

(iii) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 4\}$,

(iv) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$,

(v) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 3

(i) Stellen Sie die folgenden Funktionen durch Höhenlinien dar, indem Sie die Mengen

$$N(c) := \{(x, y) : f(x, y) = c\}$$

für $c = -2, -1, 0, 1, 2$ in ein Schaubild zeichnen.

$$(a)\ f(x, y) = xy,$$
$$(b)\ f(x, y) = 4x - y^2.$$

(ii) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \ln(x^2 + y^2 - 5)$$

(a) Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich an.

(b) Berechnen Sie alle Nullstellen von f.

(c) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge in der (x, y)-Ebene. Tragen Sie ebenfalls die Mengen $M_+ = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\}$ und $M_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) < 0\}$ ein.

Abgabe in den jeweiligen Übungsstunden am 16.1.2003 bzw. 17.1.2003.