MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
16.1.2002

12. Übung zu Mathematik für Biologen I

http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils den Gradienten

(i) $f(x,y) = \exp(2x) + y$, (ii) $g(x,y) = \sin(xy) + xy^2$, (iii) $h(x,y,z) = \ln(x^2 + 2z\exp(y))$.

Aufgabe 2

(i) Bestimmen Sie Gradient und maximalen Definitionsbereich in der (u,v)-Ebene von

$$g(u,v) = \frac{\ln(u^2+v+1)}{u+7}.$$

(ii) Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = x\exp(xy) - y^2$.

- Berechnen Sie den Gradienten von f, also grad $f(x,y)$
- Berechnen Sie alle Punkte $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, welche $\operatorname{grad} f(\bar{x},\bar{y}) = 0$ erfüllen.
- Rechnen Sie nach, dass $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y)$ gilt.

Aufgabe 3

Bei der Auswertung von n experimentell gewonnenen Datenpaaren (x_i, y_i) für $1 \le i \le n$ liegt häufig näherungsweise ein linearer Zusammenhang vor. Man möchte die Daten bestmöglich durch eine lineare Funktion $y(x) = ax + b$ zu approximieren; diese Gerade wird Regressionsgerade genannt. Zu diesem Zweck versucht man die quadratische Abweichung der Daten von der Regressionsgerade durch die Wahl von a und b zu minimieren.

In dieser Aufgabe wollen wir die Formel für die lineare Regression herleiten. Sei dazu

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$$

die quadratische Abweichung, die es zu minimieren gilt. Bekanntlich verschwindet der Gradient am Minimum, es gilt also für die gesuchten a und b die Gleichung

$$\operatorname{grad} f(a,b) := \left(\frac{\partial}{\partial a} f(a,b), \frac{\partial}{\partial b} f(a,b)\right) = (0,0).$$

Beweisen Sie, dass dann a und b wie folgt gegeben sind:

$$a = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2},$$

$$b = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - a\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor

(i) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(a,b)$.

(ii) Lösen Sie die Gleichung $\operatorname{grad} f(a,b) = (0,0)$ nach a und b auf.

Abgabe in den jeweiligen Übungsstunden am 23.1.2003 bzw. 24.1.2003.